Luciano Pandolfi

Elementi di Teoria delle Funzioni

Questa versione è scritta in carattere romano e giustificata a destra. Una versione più leggibile da chi ha problemi di dislessia (scritta in carattere bastone e non giustificata) ha per titolo *Elementi di Teoria delle Funzioni Per Studenti Dislessici*

L. Pandolfi, in pensione dal Politecnico di Torino, Dipartimento di Scienze Matematiche "G.L. Lagrange"

Indice

1 Preliminari **7**

1.1 Richiami sui numeri complessi 8

1.1.1 Interpretazione fisica delle operazioni 11

1.1.2 Radici n–me di numeri complessi 11

1.1.3 Esponenziale, logaritmo, formule di Eulero 12

Osservazione importante 14

1.1.4 La rappresentazione delle funzioni complesse di variabile complessa 14

1.2 Limiti e continuità 16

1.2.1 Derivata e integrale di funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ 18

1.2.2 Curve nel piano complesso 20

1.3 Funzioni: preliminari 24

1.4 Integrale di curva 26

1.4.1 Scambio del segno di limite e integrale; convergenza uniforme sui compatti 29

2 Le funzioni olomorfe **33**

2.1 Teorema integrale di Cauchy 33

2.2 La derivata 34

2.2.1 Primitive 38

2.2.2 Curve equipotenziali 41

2.2.3 Il caso della funzione $z \to \bar{z}$ 42

2.2.4 Funzioni logaritmo e potenze 43

Le funzioni potenza ed esponenziale con base ed esponente complessi 45

2.2.5 Esempi di funzioni olomorfe e formule di derivazione . 47

Le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari . 48

2.2.6 Punti di diramazione di funzioni olomorfe 50

2.2.7 Funzioni olomorfe, jacobiano e trasformazioni conformi 52

La matrice jacobiana e le funzioni olomorfe; derivata della funzione inversa 53
Le trasformazioni conformi 56
Osservazione sui "teoremi fondamentali del calcolo differenziale" 57
2.3 Serie di potenze e serie di Laurent 58
2.4 Indice e omotopia 64
2.4.1 Curve omotope 67
Omotopia e Teorema integrale di Cauchy 68

3 Proprietà fondamentali **71**
3.1 La formula integrale di Cauchy 71
3.1.1 La formula della media 73
3.1.2 Funzioni rappresentate mediante integrali: funzioni olomorfe e funzioni di classe C^∞ 74
3.2 Conseguenze immediate 77
3.2.1 Analiticità delle funzioni olomorfe 77
3.2.2 Funzioni armoniche 79
3.2.3 Il principio di permanenza 80
3.3 Teorema di Morera e principio di riflessione 84
3.4 Teoremi di Weierstrass e di Montel 87
3.5 Massimo modulo e Teorema di Liouville 90
3.6 Le singolarità isolate 95
3.6.1 Formula di Laurent 100
3.6.2 Singolarità e zeri ad infinito 106
3.7 Il metodo dei residui 108
3.7.1 Premessa sugli integrali impropri 108
3.7.2 Calcolo di integrali impropri 109
3.8 Il Principio dell'argomento 114
3.8.1 I teoremi di Hurwitz e Rouché e della mappa aperta . . 115
3.9 Trasformazioni conformi 120
3.9.1 Il teorema di Riemann sulle trasformazioni conformi . . 127
3.10 Funzioni analitiche secondo Weierstrass 131

4 Funzioni armoniche **137**
4.1 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe 137
4.2 La proprietà della media e il teorema di Gauss 138
4.3 Problema di Dirichlet 140
4.3.1 I problemi di Dirichlet e di Poisson 140
4.3.2 La formula di Poisson 141

4.3.3 Il problema di Dirichlet in regioni di Jordan 144

5 Trasformata di Laplace **147**
5.1 Definizioni e proprietà 147
5.1.1 Proprietà della trasformata di Laplace 148
5.1.2 Trasformata di Laplace, derivata ed integrale 152
5.1.3 Alcune trasformate fondamentali 155
5.2 Antitrasformata di Laplace 156
5.2.1 Antitrasformata di funzioni razionali 157

Capitolo 1

Numeri complessi e funzioni di variabile complessa: preliminari

Con *teoria delle funzioni* si intende per antonomasia la teoria delle funzioni complesse di variabile complessa, che sono *derivabili* nel senso del limite del rapporto incrementale, si veda la definizione al paragrafo 2.2. Le funzioni complesse di variabile complessa che sono derivabili (con continuità) in ciascun punto di una regione si chiamano *funzioni olomorfe:* la *teoria delle funzioni* è la *teoria delle funzioni olomorfe.* La teoria delle funzioni olomorfe si può fare iniziare col *Teorema integrale di Cauchy,* che è una opportuna riformulazione di proprietà note delle forme differenziali, e la definizione di derivata.

Notiamo che esiste una teoria delle funzioni olomorfe di più variabili complesse. Noi ci limitiamo al caso delle funzioni olomorfe di una sola variabile complessa.

In questo primo capitolo richiamiamo proprietà note dei numeri complessi e delle funzioni di numeri complessi note dai corsi precedenti, o loro immediata conseguenza.

I numeri complessi sono l'insieme delle coppie (x, y) di numeri reali (usualmente scritte nella forma $x + iy$) dotate di opportune operazioni. Per questo cerchiamo anche di chiarire le relazioni tra funzioni di numeri complessi e funzioni di due variabili reali. Presenteremo inoltre la definizione e le proprietà dell'integrale di curva sul piano complesso, che è una opportuna versione dell'integrale di curva di seconda specie di campi vettoriali piani (equivalentemente, dell'integrale di forme differenziali sul piano).

1.1 Richiami sui numeri complessi

E' nota la definizione seguente del campo dei numeri complessi:

- gli elementi del campo sono le coppie di numeri reali,

$$z = (x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\theta, \sin\theta) .$$

  Si sa che il numero
  $$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
  si chiama MODULO del numero complesso z mentre θ si chiama ARGOMENTO di z.

  Il modulo del numero complesso z si indica col simbolo $|z|$.

  L'argomento di z è identificato a meno di multipli di 2π se $z \neq (0, 0)$. Ogni θ si considera argomento di $(0, 0)$.

  Se $z \neq (0, 0)$ e $\theta \in [-\pi, \pi)$, allora θ è unico e si chiama ARGOMENTO PRINCIPALE di z.

  Per indicare l'argomento principale di z si usa il simbolo "Arg" (con l'iniziale maiuscola),
  $$\mathrm{Arg}\, z .$$

- L'operazione di addizione tra numeri complessi si definisce "per componenti": se $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$ allora si definisce
  $$z + w = (x + a, y + b) .$$

- L'operazione di moltiplicazione è definita come segue: se $z = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$, $w = r(\cos\phi, \sin\phi)$ allora
  $$zw = \rho r \left(cos(\theta + \phi), \sin(\theta + \phi) \right) .$$

  E' immediato verificare che il risultato non varia sommando multipli di 2π a θ oppure a ϕ.

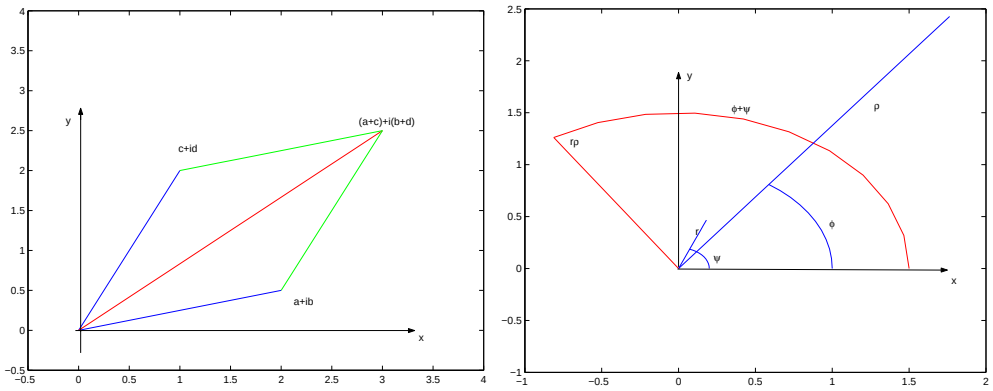
E' noto, e facile da verificare, che in questo modo si definisce un campo, che si chiama CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI. Si sa inoltre che se $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$ allora si ha

$$zw = (xa - yb, xb + ya) .$$

Invece, non esiste una rappresentazione semplice per la somma in coordinate polari.

Le operazione sono rappresentate nella figura 1.1.

Figura 1.1: Le operazioni.



Il campo dei numeri complessi si indica col simbolo $\mathbf{C}$.

Ricordiamo che se $z = (x, y)$, il numero $(x, -y)$ si indica col simbolo $\bar{z}$ e si chiama il CONIUGATO di z. Si vede facilmente che

$$|z|^2 = \bar{z}z\,.$$

L'elemento neutro rispetto all'addizione è $(0, 0)$ mentre quello rispetto alla moltiplicazione è $(1, 0)$. Invece il numero complesso $i = (0, 1)$, che si chiama UNITÀ IMMAGINARIA, ha la seguente proprietà:

$$i^2 = ii = (-1, 0)\,.$$

Osservazione 1 In molti testi, specialmente di ingegneria, si "definisce" i mediante l'uguaglianza $i^2 = -1$. Ciò è sbagliato, perché l'equazione $z^2 = -1$ ha le **due** soluzioni i e $-i$. ∎

Notiamo ora che

$$z = (x, y) = (x, 0)(1, 0) + (y, 0)(0, 1)$$

e che la trasformazione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ che ad x fa corrispondere il numero $(x, 0)$ è un omomorfismo (i numeri complessi $(x, 0)$ si chiamano anche NUMERI COMPLESSI REALI). Ciò suggerisce di rappresentare ogni numero complesso $z = (x, y)$

come segue: se $y = 0$ invece di scrivere $(x, 0)$ si scrive semplicemente x e invece di scrivere $(0, 1)$ si scrive i. In questo modo,

$$z = (x, y) = (x, 0)(1, 0) + (y, 0)(0, 1) = 1x + iy$$

e, sottintendendo 1, si trova la rappresentazione

$$z = x + iy$$

che si chiama la RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA dei numeri complessi. Si chiama invece RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA la rappresentazione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \begin{cases} \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}.$$

L'opposto di $z = x + iy$ rispetto alla moltiplicazione è per definizione il numero w che verifica $wz = 1$. Il numero w si indica col simbolo $1/z$ e si calcola facilmente che

$$w = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Con la notazione trigonometrica, l'opposto di

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

è

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Il numero *reale* x si chiama la PARTE REALE di $z = x+iy$ mente il numero *reale* y si chiama la PARTE IMMAGINARIA di $z = x + iy$. Essi si indicano con i simboli

$$\Re e\, z\,, \qquad \mathcal{I}m\, z\,.$$

Notiamo infine: *uno degli argomento di un prodotto è la somma degli argomenti dei fattori; un argomento di un quoziente è la differenza tra l'argomento del numeratore e quello del denominatore.*

Osservazione 2 Va notato esplicitamente che le affermazioni precedenti valgono pur di scegliere un opportuno argomento. Non valgono per l'argomento principale. Infatti, se $z = w = i$, $\operatorname{Arg} zw = -\pi$ mentre invece $\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = +\pi$. ∎

1.1.1 Interpretazione fisica delle operazioni

E' utile vedere le relazioni tra le operazioni introdotte tra i numeri complessi e le leggi della fisica. Per l'addizione ciò è facile: essa corrisponde all'addizione di vettori, fatta componente per componente. La moltiplicazione si incontra invece estendendo la legge di Ohm alle correnti alternate.

Va inoltre notato che quando (x, y) ed (x', y') sono due vettori del piano, ad essi si associano:

- il prodotto scalare $xx' + yy'$;
- il prodotto vettoriale, che è un vettore di $\mathbf{R}^3$, uguale a $(xy' - x'y)\mathbf{k}$.

I due numeri $(xx' + yy')$ e $xy' - x'y$ si ritrovano calcolando il prodotto $\bar{z}w$ con $z = x + iy$, $w = x' + iy'$:

$$\bar{z}w = (xx' + yy') + i(xy' - x'y).$$

Quando si pensa di rappresentare i numeri complessi mediante punti del piano, questo si chiama PIANO COMPLESSO o PIANO DI ARGAND-GAUSS.

1.1.2 Radici n–me di numeri complessi

Sia z un numero complesso. Si chiamano RADICI n–ME di z i numeri w tali che $w^n = z$. Se $z = 0$ si vede subito che c'è una sola radice n–ma, $w = 0$. Invece, ogni $z \neq 0$ ha n radici n–me. Se

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ciascuno dei numeri

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

verifica $w^n = z$, qualunque sia il numero *intero* (positivo o meno) k. E' facile vedere però che soltanto i valori di k

$$k = 0\,, 1\,, \ldots\,, n-1$$

danno valori distinti. Dunque $z \neq 0$ ha esattamente n radici n–me le quali sono vertici di un poligono regolare di n lati e appartengono alla circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[n]{|z|}$.

Ciascuna delle funzioni

$$f_k(z) = |z|^{1/n} e^{i(\mathrm{Argz} + 2\mathrm{k}\pi/n)}$$

si chiama una DETERMINAZIONE della radice n–ma.

La non unicità della radice n–ma con $n > 1$ dipende dal fatto che la funzione $z \mapsto z^n$ non è iniettiva.

1.1.3 Esponenziale, logaritmo, formule di Eulero

Si definisce

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

dove e^x è il valore noto dai corsi relativi alle funzioni di variabile reale mentre e^{iy} è ancora da definire. Si definisce

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \,.$$

In questo modo,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \,. \tag{1.1}$$

Dunque, la rappresentazione trigonometrica

$$r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

si può anche scrivere come

$$e^{\log r + i\theta} \,.$$

Si vede immediatamente che, se $y = 0$, allora $e^z = e^{x+i0} = e^x + i0$, numero complesso reale e, usando le formule di trigonometria, si vede subito che vale

$$e^{z+w} = e^z e^w \,.$$

Vale inoltre:

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^x \,.$$

In particolare, *l'equazione $e^z = 0$ non ha soluzioni.*

La funzione esponenziale ha sul piano complesso una proprietà inattesa: *la funzione e^z è periodica di periodo $2\pi i$.*

Dalla (1.1) seguono immediatamente le FORMULE DI EULERO

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{iy}}{2} \,, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \,.$$

Queste suggeriscono di estendere le funzioni trigonometriche al piano complesso, definendo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} \,, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \,.$$

Si suggerisce di risolvere le equazioni

$$\cos z = w \,, \qquad \sin z = w$$

rispetto a z notando che ambedue le funzioni $\cos z$ e $\sin z$ sono *suriettive* (e in particolare *illimitate*).

Conviene ora introdurre il LOGARITMO di numeri complessi. Sia $z \neq 0$. I logaritmi (in base e) di z sono quei numeri w tali che $e^w = z$. Si rappresenti z in forma trigonometrica,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

e w in forma algebrica,

$$w = x + iy\,.$$

Allora, w è un logaritmo di z quando

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

Questo avviene se

$$x = \log r\,, \qquad y = \theta + 2k\pi$$

con k numero intero qualsiasi. Dunque, *ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi (e quindi, la funzione e^w prende ogni valore non nullo):*

$$\log z = \log|z| + i\arg z$$

ove $\arg z$ è uno qualsiasi degli argomenti di z e $\log|z|$ è il logaritmo del numero (reale) $|z|$ così come è stato definito nei corsi precedenti.

La non unicità del logaritmo dipende dal fatto che esso è definito come inverso di una funzione periodica.

Si chiama LOGARITMO PRINCIPALE di z il numero

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\mathrm{Arg}\, z$$

(si noti l'uso dell'iniziale maiuscola).

Dunque, ciascuna delle funzioni

$$\log z = \log|z| + i(2k\pi + \mathrm{Arg}z) \tag{1.2}$$

verifica

$$z = e^{\log z} = e^{\log|z| + i(2k\pi + \mathrm{Arg}z)}\,.$$

Ciascuna delle funzioni in (1.2) si chiama una DETERMINAZIONE del logaritmo.

Definito il logaritmo, è facile definire le POTENZE z^α ad esponente α qualsiasi, reale o complesso. Se $\alpha = 0$ si pone $z^0 = 1$ (salvo il caso $z = 0$. Al simbolo 0^0 non si attribuisce significato). Altrimenti si definisce

$$z^\alpha = e^{\alpha\log z}\,.$$

Si vede facilmente che se α è intero positivo, $\alpha = n$, si ritrova z^n; se $\alpha = 1/n$ si ritrovano le radici n–me. In generale però la potenza ha infiniti valori.

Si calcolino per esercizio le potenze i^i, 1^i, $(-1)^i$ individuando la cardinalità dell'insieme dei loro valori.

Osservazione importante

Abbiamo notato che vale la formula

$$e^{z+w} = e^z e^w \,.$$

La formula corrispondente,

$$\log zw = \log z + \log w$$

vale, ma *va interpretata come uguaglianza di insiemi.* Teniamo presente questo per interpretare i calcoli seguenti:

Se A e B sono insiemi di numeri complessi, definiamo

$$A + B = \{a + b\,, \quad a \in A\,,\ b \in B\}\,.$$

Notiamo ora che

$$\begin{aligned}&\log zw = \log|zw| + i\,(\arg(zw) + 2k\pi)\\ &= \log|z| + \log|w| + i\,(\arg z + \arg w + 2k\pi)\\ &= \{\log|z| + i\,(\arg z + 2n\pi)\} + \{\log|w| + i\,(\arg w + 2m\pi)\} = \log z + \log w\,.\end{aligned}$$

La formula corrispondente NON vale se si intende di lavorare con i logaritmi principali, come mostra l'esempio seguente:

Esempio 3 Il logaritmo principale di i è

$$\mathrm{Log}\, i = i\pi/2$$

e

$$2\mathrm{Log}\, i = i\pi\,.$$

Invece,

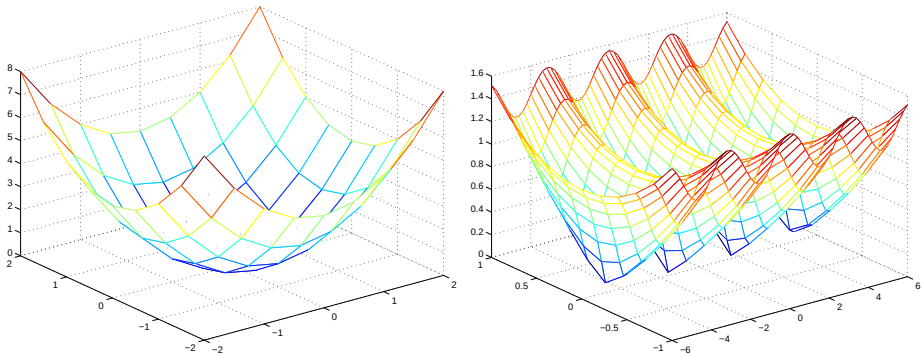
$$\mathrm{Log}(-1) = \mathrm{Log}(i^2) = -i\pi \neq 2\mathrm{Log}\, i\,. \quad \blacksquare$$

1.1.4 La rappresentazione delle funzioni complesse di variabile complessa

Con l'aiuto di alcune figure, accenniamo a come rappresentare graficamente le funzioni complesse di variabile complessa. Il grafico naturalmente non serve, perché il grafico è un insieme di $\mathbf{R}^4$. E' però possibile rappresentare il grafico di $z \to |f(z)|$, che è in $\mathbf{R}^3$ e spesso su tale grafico si disegnano le linee

$$\mathrm{Arg}\, f(z) = \mathrm{cost}$$

Figura 1.2: a sinistra $|z^2|$, a destra $|\cos z|$. Le linee sono le immagini di una griglia $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$.



oppure l'immagine di una famiglia di linee del piano della variabile z.

Un altro metodo consiste nel tracciare una famiglia di linee sul piano z e le loro immagini sul piano w, o viceversa una famiglia di linee sul piano w e le loro controimmagini sul piano z. Il caso della funzione $f(z) = z^2/10$ è mostrato nella figura 1.4.

La fig.1.4 mostra una griglia di rette e semirette mutuamente ortogonali nel piano $\mathcal{I}m\, z > 0$. Queste si trasformano in due famiglie di parabole, mutuamente ortogonali, dato che $f'(z) = 2z \neq 0$. Queste parabole riempiono tutto il piano w.

La circonferenza

$$e^{i\theta}\,, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

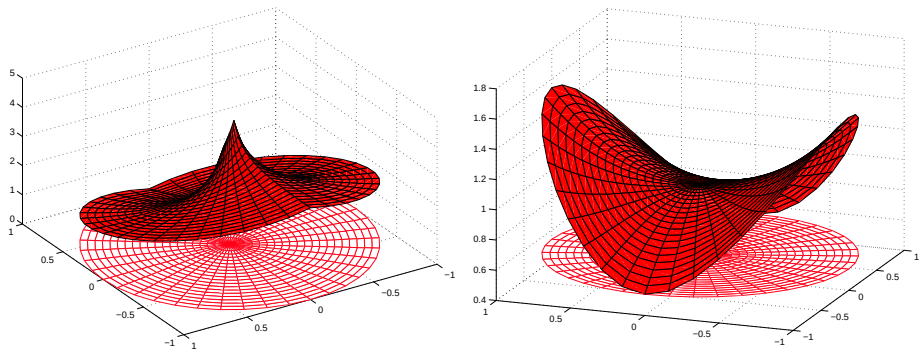
sotto l'azione di $f(z) = z^2$ è ancora una circonferenza,

$$e^{i\theta}\,, \qquad 0 \leq \theta \leq 4\pi\,,$$

che però è *percorsa due volte,* anche se ovviamente ciò non può vedersi dalla figura. Se però si rappresenta l'immagine di una circonferenza centrata nel punto $(0, 1/5)$, come in figura 1.5 si vede immediatamente che l'immagine è una curva non semplice, che gira due volte intorno all'origine.

Pensiamo ora di disegnare l'immagine di una famiglia di circonferenze di centro $(0, 0)$ mediante le funzioni $f(z) = z$ e $g(z) = 1/z$. Si trova ancora una famiglia di circonferenze col medesimo centro, e da questo punto di vista le due funzioni sembrano indistinguibili. Però, $f(z) = z$ trasforma la *regione interna* di una circonferenza nella *regione interna* della circonferenza corrispondente mentre $g(z)$ la trasforma nella *regione esterna.*

Figura 1.3: a sinistra $|\mathrm{Log} z|$, a destra $|\sin z|$. Le linee sono le immagini di una griglia $r = \text{cost}$, $\theta = \text{cost}$.



Analoga osservazione può farsi, per esempio, per le funzioni e^z ed e^{-z} e ciò suggerisce di considerare la regione esterna ad un disco come "intorno di ∞". Tecnicamente, di sostituire il piano complesso con la corrispondente compattificazione di Alexandrov. Un modo comodo di fare ciò consiste nel considerare una sfera il cui polo SUD tocca $\mathbf{R}^2$ (insieme di partenza della funzione) in $(0, 0)$. Il polo NORD viene ad avere il ruolo di ∞. Il piano $\mathbf{R}^2$ si rappresenta sulla sfera, mediante la proiezione stereografica, dal polo NORD. La corrispondenza ottenuta è bicontinua tra il piano e la sfera privata del polo NORD e la sfera stessa, usata in questo modo, si chiama SFERA DI RIEMANN, si veda la figura 1.6.

La funzioni da $\mathbf{C}$ in sé possono quindi rappresentarsi anche come funzioni da $\mathbf{C}$ nella sfera o dalla sfera in sé,

1.2 Limiti e continuità

La funzione

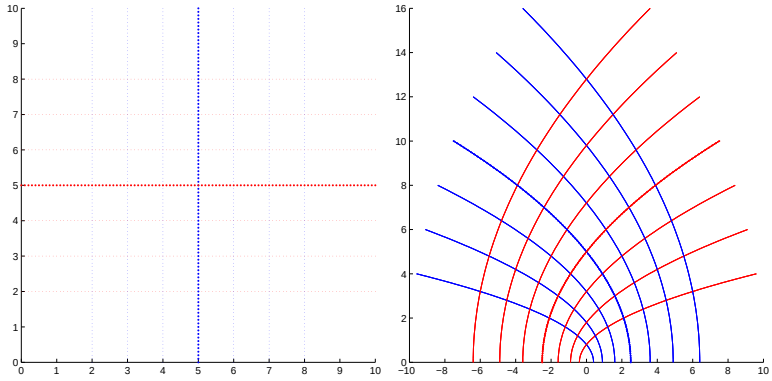
$$z \to |z|$$

è una norma su $\mathbf{C}$ (l'immediata verifica si lascia per esercizio) e quindi è possibile definire una topologia su $\mathbf{C}$, introducendo gli INTORNI. L'intorno di z_0 di raggio r è l'insieme

$$\{z \mid |z - z_0| < r\}.$$

Geometricamente si tratta di un disco del piano complesso (privato della circonferenza) di centro z_0 e raggio r.

Figura 1.4: Immagine di rette, sotto l'azione di $f(z) = z^2/10$.



Definiti gli intorni, e quindi la topologia, è ovvia la definizione di limite di una successione (z_n): si dice che $\lim z_n = z_0$ quando per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che per ogni $n > N_\epsilon$ vale

$$|z_n - z_0| < \epsilon \, .$$

Sia $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Si provi per esercizio che $\lim z_n = z_0$ se e solo se $\lim x_n = x_0$ e anche $\lim y_n = y_0$.

Definito il concetto di intorno, le definizioni di *limite* e *continuità* sono date nel modo usuale:

- Sia $f(z)$ definita su Ω e sia z_0 punto di accumulazione di Ω. Si scrive

  $$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

  se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ tale che

  $$z \in \Omega \setminus \{z_0\} \, , \quad |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \epsilon \, .$$

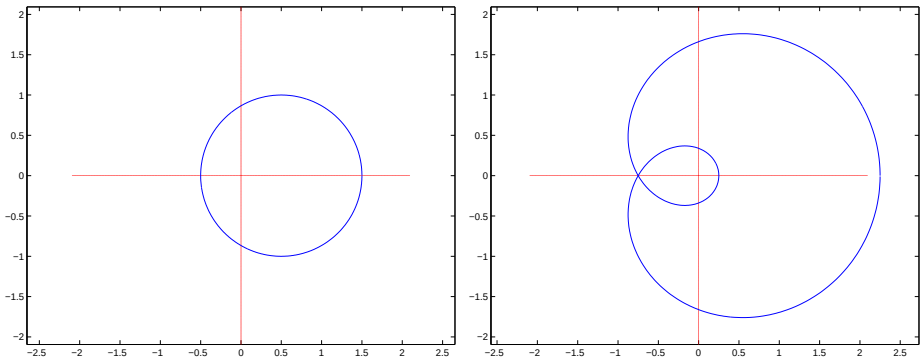
- se $z_0 \in \Omega = \operatorname{dom} f(z)$, la funzione $f(z)$ si dice continua in z_0 se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Si lascia per esercizio di adattare la definizione di limite e di continuità nota dal corso di topologia al caso delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$, da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{R}$.

Per esercizio, si mostri che sono continue le seguenti funzioni:

$$z \to z \, , \quad z \to |z| \, , \quad z \to \Re e \, z \, , \qquad z \to \mathcal{I}m \, z \, , \quad z \to \bar{z} \, . \tag{1.3}$$

Figura 1.5: Immagine di una circonferenza mediante z^2: la circonferenza a sinistra e la sua immagine a destra.



Di conseguenza sono continui tutti i polinomi. Si studi invece la continuità della funzione

$$z \to \operatorname{Arg} z\,,$$

mostrando che questa è continua salvo che nei punti dell'asse reale negativo.

Osservazione 4 Di conseguenza, anche le determinazioni del logaritmo sono continue in tutti i punti, salvo quelli dell'asse reale negativo. Asserto analogo vale per le determinazioni della radice n–ma. ∎

1.2.1 Derivata e integrale di funzioni da R in C

Sia $t \to z(t) = x(t) + iy(t)$ una funzione definita su un intervallo (a, b) e sia $t_0 \in (a, b)$. Ovviamente, definiremo

$$z'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{z(t_0 + k) - z(t_0)}{h} = x'(t_0) + iy'(t_0)\,. \tag{1.4}$$

Vediamo due esempi:

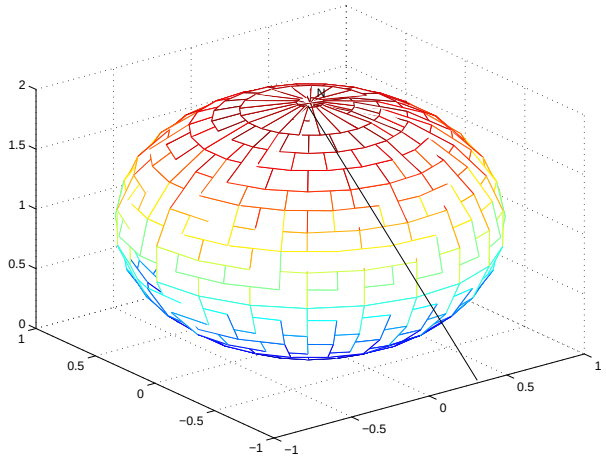
Esempio 5 Sia $\alpha = a + ib$ un numero complesso e sia

$$z(t) = x(t) + iy(t) = e^{\alpha t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)\,.$$

Si verifica immediatamente che

$$x'(t) = ax(t) - by(t)\,, \qquad y'(t) = ay(t) + bx(t)$$

Figura 1.6: La sfera di Riemann.



e quindi

$$z'(t) = ax(t) - by(t) + i[ay(t) + bx(t)] = (a + ib)(x(t) + iy(t)) = \alpha e^{\alpha t}\,.$$

Si ritrova quindi l'usuale formula di derivazione dell'esponenziale. ∎

Esempio 6 La funzione $z \to \operatorname{Arg} z$ è discontinua nei punti dell'asse reale negativo. Inoltre, per ogni numero complesso α,

$$\operatorname{Arg} \alpha t = \begin{cases} \operatorname{Arg} \alpha & \text{se} \quad t > 0 \\ (\operatorname{Arg} \alpha) - \pi & \text{se} \quad t < 0\,. \end{cases}$$

E' quindi derivabile in ogni $t \neq 0$, con derivata nulla. Ne segue che ciascuna delle funzioni

$$\log \alpha t = \log |\alpha t| + i[\operatorname{Arg}(\alpha t) + 2k\pi] = \log (|\alpha||t|) + i[\operatorname{Arg}(\alpha t) + 2k\pi]$$

è derivabile per $t \neq 0$ e la derivata è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log \alpha t = \frac{1}{|\alpha t|} |\alpha| \operatorname{sgn} t = \frac{1}{t}\,. \quad ∎$$

Se $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, definiamo

$$\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t + i \int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

E' immediato dalla definizione che:

$$\Re e \int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Re e\, z(t)\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\mathcal{I}m \int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathcal{I}m\, z(t)\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\overline{\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t} = \int_a^b \bar{z}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Sia ora $(z_n(t))$ una successione di funzioni continue su $[a,b]$, convergente *uniformemente* a $z_0(t)$. Applicando il teorema di scambio tra limiti ed integrali di Riemann alla parte reale ed alla parte immaginaria, si vede che

$$\lim \int_a^b z_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b z_0(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Sia ora $z(t,s)$ una funzione di due variabili reali t ed s, con $(t,s) \in [a,b] \times [c,d]$, a valori complessi. Applicando alla parte reale e alla parte immaginaria di z i corrispondenti teoremi relativi alle funzioni a valori reali si trova che se $z(t,s)$ è continua nelle due variabili,

$$s \to \int_a^b z(t,s)\,\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

è continua in s. Se $z(t,s)$ è di classe C^1 allora la funzione è derivabile e, dalla (1.4),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_a^b z(t,s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} z(t,s)\,\mathrm{d}t\,.$$

1.2.2 Curve nel piano complesso e integrale di curva

Chiameremo CURVA parametrica una funzione $t \to z(t)$ continua da un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ in $\mathbf{C}$. Diremo che la curva è CHIUSA quando $z(a) = z(b)$ e diremo che è SEMPLICE se $z(t) = z(t')$ può solo aversi per $t = t'$ oppure per $t = a$ e $t' = b$ (in questo caso la curva è sc semplice e chiusa).

Diremo che la curva è REGOLARE quando

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

esiste per ogni $t \in (a,b)$ e inoltre $|z'(t)| \neq 0$ per ogni t.

Se la derivata non esiste, oppure è nulla, solamente in un numero finito di punti e in tali punti esistono finiti i limiti di $z'(t)$ da destra e da sinistra,

diremo che la curva è REGOLARE A TRATTI. Una curva regolare a tratti si dirà un CAMMINO.

Una curva regolare a tratti ottenuta giustapponendo segmenti si chiamerà una POLIGONALE. Chiameremo POLIGONO una poligonale chiusa.

L'immagine della funzione $z(t)$ si chiama il SOSTEGNO della curva.

Una curva semplice e chiusa si chiama anche CURVA DI JORDAN e divide il piano in due regione, una limitata e una illimitata. La regione limitata si dice REGIONE INTERNA alla curvae l'altra si dice REGIONE ESTERNA.

Il teorema di Jordan, apparentemente semplice, è invece di dimostrazione molto difficile. Però in pratica, e anche per gli usi teorici, le curve che è necessario usare sono "molto semplici" (per esempio poligonali, circonferenze, ellissi o riunione di un numero finito di archi di tali curve). In tal caso è facile individuare la regione interna ed è anche facile vedere se la curva è ORIENTATA POSITIVAMENTE. Ciò avviene quando, al passare del parametro t da a a b, il punto mobile sulla curva vede la regione interna alla sua sinistra (REGOLA D'AMPÈRE.).

Se non esplicitamente detto il contrario, assumeremo sempre che le curve con cui si lavora siano orientate positivamente.

La regione interna ad una curva di Jordan si chiama anche REGIONE DI JORDAN.

Una curva si indicherà con una lettera greca minuscola, per esempio γ. Se la curva è semplice e chiusa, la sua regione interna si indica col simbolo Ω_γ.

Notiamo esplicitamente questa proprietà: se γ è una curva di Jordan il cui sostegno è contenuto nella *regione di Jordan* Ω, e se Ω_γ indica la regione intera a γ, vale

$$\Omega_\gamma \subseteq \Omega\,.$$

Questa proprietà generalmente non vale se Ω non è di Jordan.

Un'ulteriore proprietà che è bene conoscere è la seguente: se due curve

$$z = z(t)\,, \quad t \in [a,b]\,, \qquad \zeta = \zeta(\tau) \quad \tau \in [\alpha,\beta]$$

sono semplici ed hanno la medesima immagine allora esiste un cambiamento di parametro

$$t = t(\tau)$$

tale che

$$\zeta(\tau) = z(t(\tau))$$

e inoltre la funzione $\tau \to t(\tau)$ è crescente oppure decrescente da $[\alpha,\beta]$ su $[a,b]$ (e quindi è anche continua). Detto in altro modo, a meno di riparametrizzazioni, il sostegno di una curva semplice è sostegno solamente di una seconda curva,

che si ottiene dalla prima cambiando il verso di percorrenza. Questa proprietà permette di semplificare il nostro linguaggio come segue: dato per esempio un quadrato, esiste un'unica curva che lo ha per sostegno e che è orientata positivamente. Allora chiameremo "curva" il quadrato, intendendo con ciò di considerare quella curva semplice che è orientata positivamente e che ha il quadrato assegnato come sostegno. Potremo ricorrere a questa semplificazione di linguaggio solamente quando il sostegno che consideriamo è sostegno di una curva semplice e chiusa.

Richiamiamo il teorema seguente, dovuto a Green. Si tratta di una particolarizzazione al piano del TEOREMA DI STOKES. A seconda dei testi, questa formula si chiama TEOREMA (O FORMULA) DI GREEN oppure FORMULA DI STOKES.

Teorema 7 *Siano $u(x, y)$ e $v(x, y)$ di classe C^1 in una regione di Jordan Ω a valori reali e sia γ una curva semplice e chiusa in Ω. Vale:*

$$\int_\gamma u\, dx + v\, dy = \int_{\Omega_\gamma} [v_x(x, y) - u_y(x, y)]\, dx\, dy\,. \tag{1.6}$$

L'integrale a sinistra in (1.6) è l'integrale della FORMA DIFFERENZIALE

$$u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y$$

e l'uguaglianza (1.6) mostra che quest'integrale è nullo se

$$v_x(x, y) - u_y(x, y) = 0 \qquad \forall (x, y) \in \Omega\,. \tag{1.7}$$

In questo caso si dice che la forma differenziale $u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y$ è CHIUSA.

Vale anche il viceversa e riunendo i due enunciati si ha:

Teorema 8 *Sia Ω una regine di Jordan. Si ha*

$$\int_\gamma u\, dx + v\, dy = 0$$

per ogni curva chiusa γ in Ω se e solo se vale (1.7).

Si sa inoltre che la formula (1.6) si estende al caso in cui si abbiano due curve, γ nella regione Ω e η nella regione Ω_γ. In questo caso la (1.6) assume la forma

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y - \int_\eta u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_\gamma - \Omega_\eta} [v_x(x, y) - u_y(x, y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{1.8}$$

Questa uguaglianza vale se u e v sono di classe C^1 in una regione che contiene $\Omega_\gamma \setminus \operatorname{cl}\Omega_\sigma$, anche se le funzioni u e v non sono regolari in Ω_σ.

Da questa formula faremo discendere tutti i risultati relativi alle funzioni olomorfe che vedremo.

Infine ricordiamo:

Teorema 9 *Sia γ una curva di Jordan ed Ω_γ la sua regione interna. Siano $u(x,y)$ e $v(x,y)$ di classe $C^1(\Omega)$. La forma differenziale $u\,dx + v\,dy$ è chiusa se e solo se esiste $H(x,y)$ tale che*

$$H_x(x,y) = u(x,y)\,, \qquad H_y(x,y) = v(x,y)\,. \tag{1.9}$$

Quando esiste una funzione $H(x,y)$ per cui valgono le uguaglianze in (1.9) si dice che LA FORMA DIFFERENZIALE $u\,\mathrm{D}x + v\,\mathrm{D}y$ È ESATTA. La funzione $H(x,y)$ si chiama la PRIMITIVA mentre $-H(x,y)$ si chiama il POTENZIALE del campo vettoriale $(u(x,y), v(x,y))$.

1.3 Funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ e funzioni da C in C

Dato che i numeri complessi sono coppie di numeri reali, ogni funzione

$$(x, y) \to (\, u(x, y), v(x, y)\,) \tag{1.10}$$

si può intendere come funzione a valori complessi

$$(x, y) \to u(x, y) + iv(x, y)$$

e si può anche voler rappresentare il suo dominio con le notazioni dei numeri complessi,

$$(x, y) = x + iy = z\,.$$

Ricordiamo la notazione $\bar{z}$ per indicare il coniugato di z: $\bar{z} = x - iy$ e notiamo che $\bar{z}$ è una funzione di z. Essendo

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}\,, \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

la funzione in (1.10) si può anche rappresentare come

$$f(z) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \tag{1.11}$$

ove $\bar{z}$ è funzione di z.

Notiamo subito una dissimmetria tra l'insieme di partenza e l'insieme d'arrivo: la relazione di coniugio appare nella formula (1.11) soltanto applicata alla variabile z.

Anche la via opposta si può seguire: se $w = f(z)$ si può scrivere

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

con u e v le parti reale ed immaginaria di f e x, y le parti reale ed immaginaria di z. Ciò suggerisce che la teoria delle funzioni di variabile complessa sia un modo diverso di formulare la teoria delle funzioni da $\mathbf{R}^2$ in sé. In realtà vedremo che le cose non sono così semplici. Però, almeno al livello della *rappresentazione grafica* l'identificazione appena presentata è utile e si è già usata al paragrafo 1.1.4.

Vediamo ora alcuni esempi.

- **Esempio 1.** Sia

$$u(x, y) = x\,, \qquad v(x, y) = -y\,.$$

Con notazione complessa questa funzione si rappresenta come

$$z \to \bar{z}\,.$$

- **Esempio 2.** Sia

$$u(x,y) = x^2 + y^2\,, \qquad v(x,y) = 0\,.$$

Con notazione complessa questa funzione si rappresenta come

$$z \to \bar{z}z\,.$$

- **Esempio 3.** Sia

$$u(x,y) = x^2 + y^2\,, \qquad v(x,y) = 2xy\,.$$

Con notazione complessa questa funzione si rappresenta come

$$z \to \bar{z}z - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2)\,.$$

- **Esempio 4.** Sia

$$u(x,y) = x^2 - y^2\,, \qquad v(x,y) = 2xy\,.$$

Con notazione complessa questa funzione si rappresenta come

$$z \to z^2\,.$$

Notiamo che ciascuna delle funzioni degli esempi precedenti, *come funzione delle due variabili reali x ed y,* è di classe C^1. Cerchiamo però di calcolare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,.$$

Nel case dell'esempio 4 questo si riduce a

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = 2z_0\,.$$

Dunque, il limite esiste in ciascun punto z_0.

Consideriamo ora il caso della funzione $z \mapsto \bar{z}$. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \quad \text{ossia} \quad \lim_{w\to 0} \frac{\bar{w}}{w}$$

ove si è posto $w = z - z_0$. E' chiaro che questo limite non esiste. Infatti, se $w = x + i0$ il limite esiste e vale 1 mentre muovendsi sull'asse immaginario, ossia $w = iy$ allora $\bar{w}/w = -1$ per ogni $w \neq 0$, ed il limite vale -1.

Di conseguenza, la funzione $z \mapsto \bar{z}$ è continua su $\mathbb{C}$, derivabile in nessun punto.

Consideriamo la funzione dell'esempio 2. In tal caso il limite esiste solo per $z_0 = 0$. Infatti, se $z_0 = 0$ si ha

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}z}{z} = \lim_{z\to z_0} \bar{z} = 0\,.$$

Se però $z_0 \neq 0$ si trova

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z}z - \bar{z}_0 z_0}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} z + \bar{z}_0 \frac{z - z_0}{z - z_0} \right\}\,.$$

Il limite del secondo addendo esiste:

$$\lim_{z\to z_0} \bar{z}_0 \frac{z - z_0}{z - z_0} = \bar{z}_0$$

mentre abbiamo già visto che il limite del primo addendo non esiste.

Si ritrovi l'esistenza del limite quando $z_0 = 0$, per questa via.

In modo analogo si vede che il limite non esiste nemmeno nel caso delle funzioni dell'esempio 3.

Osservazione 10 Si noti che le quattro funzioni precedenti, considerate come funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$, sono di classe C^∞. ∎

Quando il limite del rapporto incrementale esiste, naturalmente lo chiameremo *derivata.* Gli esempi precedenti mostrano che questo concetto di derivata è molto forte: funzioni di classe C^∞ come funzioni di due variabili, ossia funzioni che hanno derivate parziali continue di ogni ordine, non hanno derivata nel senso del limite del rapporto incrementale.

Possiamo ora spiegare quale è l'oggetto della così detta *Teoria delle funzioni.* Per antonomasia si chiama in questo modo la teoria delle funzioni di variabile complessa, che sono derivabili in ciascun punto di una regione. La derivata si intende nel senso del limite del rapporto incrementale, il rapporto essendo calcolato per mezzo del quoziente di numeri complessi.

Lo studio della derivata è centrale nella teoria delle funzioni di variabile complessa, e lo riprenderemo a partire dal paragrafo 2.2.

1.4 Integrale di curva

Col termine CURVA intenderemo sempre un arco regolare a tratti a valori in $\mathbf{C}$, ossia una funzione *continua* $t \to z(t) = x(t) + iy(t)$ definita per $t \in$

$[a, b]$, ovunque derivabile salvo un numero finito di punti. In tali punti, e negli estremi a e b, richiederemo l'esistenza dei limiti direzionali della derivata. Richiederemo inoltre che

$$|z'(t)| \neq 0\,,$$

salvo al più in un numero finito di punti.

Introduciamo la notazione

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z. \tag{1.12}$$

Se $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ è una funzione continua e se γ è parametrizzata da

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

definiamo

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))][x'(t)+iy'(t)]\,\mathrm{d}t\,.$$

Sviluppando i calcoli si trova

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_a^b [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t + \\
&i\int_a^b [u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_\gamma v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Si trova quindi

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_\gamma v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y\,, \tag{1.14}$$

la somma di due integrali di forme differenziali.

Osservazione 11 Alla stessa espressione si perviene definendo l'integrale come limite delle somme di Riemann

$$\sum_{i=0}^{n} f(z(t_i))z'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\,.$$

Omettiamo i dettagli della dimostrazione. ∎

Gli integrali delle forme differenziali non mutano cambiando la parametrizzazione di γ; cambiano segno cambiando il verso di percorrenza su γ. Dunque queste stesse proprietà valgono per l'integrale (1.14).

Proviamo ora:

Lemma 12 *Sia $\phi(t)$, $t \in [a,b]$, una funzione continua a valori complessi. Vale:*

$$\left| \int_a^b \phi(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |\phi(t)|\, dt\,.$$

Dim. Indichiamo con z_0 il numero

$$z_0 = \int_a^b \phi(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Se $z_0 = 0$ niente va provato. Sia quindi $z_0 \neq 0$. Si sa che

$$|z_0| = \frac{z_0 \bar{z_0}}{|z_0|}$$

e quindi

$$\left| \int_a^b \phi(t)\, \mathrm{d}t \right| = |z_0| = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|} z_0 = \int_a^b \frac{\bar{z_0}}{|z_0|} \phi(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

La funzione $t \to \frac{\bar{z_0}}{|z_0|}\phi(t)$ è ancora una funzione a valori complessi, ma l'uguaglianza precedente mostra che il suo integrale è reale positivo. Dunque, l'integrale della sua parte immaginaria è nullo e quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \phi(t)\, \mathrm{d}t \right| &= \int_a^b \Re e \left\{ \frac{\bar{z_0}}{|z_0|} \phi(t) \right\} \mathrm{d}t \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\bar{z_0}}{|z_0|} \phi(t) \right| \mathrm{d}t = \int_a^b |\phi(t)|\, \mathrm{d}t\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 13 La disuguaglianza precedente vale *perché stiamo considerando l'integrale su un segmento dell'asse reale.* Non ha invece alcun senso scrivere $\left| \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, \mathrm{d}z$, con γ generica curva. Infatti in tal caso l'integrale a destra prende valori complessi anche se l'integrando è reale. La formula che sostituisce la disuguaglianza sbagliata precedente è data dal prossimo teorema. $\blacksquare$

Ricordiamo che

$$L_\gamma = \int_a^b |z'(t)|\, \mathrm{d}t$$

è per definizione la lunghezza della curva regolare a tratti $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a,b]$. Dal lemma precedente segue:

Teorema 14 *Sia $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a,b]$ una curva regolare a tratti e sia $f(z)$ una funzione da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$, continua sul sostegno della curva γ. Sia M tale che*

$$|f(z(t))| \leq M\,, \qquad t \in [a,b]\,.$$

Vale:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq ML_\gamma\,.$$

Dim. Si applichi il Lemma 12 alla funzione $f(z(t))z'(t)$. Si trova

$$\begin{aligned}&\left|\textstyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\textstyle\int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \textstyle\int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,\mathrm{d}t \leq ML_\gamma\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.4.1 Scambio del segno di limite e integrale; convergenza uniforme sui compatti

Ricordiamo la definizione (1.13): se se

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)\,, \qquad z = z(t) = x(t) + iy(t)\,, \qquad t \in [a,b]$$

abbiamo definito

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,\mathrm{d}z &= \int_a^b \{u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\}\,\mathrm{d}t \\ &+i\int_a^b \{v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)\}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ossia $\int_\gamma f\,\mathrm{d}z$ è la somma di quattro integrali di funzioni continue su $[a,b]$, intervallo limitato e chiuso. Dunque, a tali integrali si possono applicare tutte le proprietà note per gli integrali di funzione di variabile reale. In particolare, se $(u_n(x,y))$ è una successione che converge uniformemente ad $u(x,y)$ allora

$$\lim_n u_n(x(t),y(t)) = u(x(t),y(t))$$

e il limite è uniforme su $[a,b]$. Dunque,

$$\begin{aligned}\lim \int_a^b u_n(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b u(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t \\ \lim \int_a^b u_n(x(t),y(t))y'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b u(x(t),y(t))y'(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Analogo argomento vale se $(v_n(x,y))$ converge uniformemente a $v(x,y)$.

Sia ora $(f_n(z))$ una successione di funzioni della variabile complessa z, convergente uniformemente ad $f(z)$. Si sa che ciò avviene se e solo se le parti reali, rispettivamente immaginarie, delle $f_n(z)$ convergono rispettivamente alla parte reale ed immaginaria di $f(z)$. Dunque:

Teorema 15 *Sia $(f_n(z))$ una successione di funzioni continue su una regione Ω, e sia γ una curva il cui sostegno è in Ω. Supponiamo che esista una funzione $f(z)$, definita sul sostegno di γ, tale che*

$$\lim_n f_n(z) = f(z)\,,$$

uniformemente sul sostegno di γ. Allora vale

$$\lim \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

In pratica non è comodo studiare la convergenza di una successione di funzioni sul sostegno di una singola curva. Si presenta però frequentemente il caso seguente: una successione di funzioni continue $(f_n(z))$ converge ad una funzione $f(z)$ in ogni punto di Ω, ma non uniformemente. Accade però che per ogni compatto K contenuto in Ω la convergenza è uniforme; ossia, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon, K)$ tale che se $n > N$ allora vale

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \qquad \forall z \in K\,.$$

In tal caso si dice che la successione $(f_n(z))$ CONVERGE UNIFORMEMENTE SUI COMPATTI DI Ω.

La convergenza uniforme sui compatti ovviamente implica la continuità della funzione limite $f(z)$ e inoltre implica la convergenza uniforme sui sostegni di curve che sono contenuti in Ω, perchè i sostegni di curve sono compatti. Dunque permette l'applicazione del Teorema 15.

I risultati precedenti permettono di chiarire come si comporta l'integrale di curva al variare della curva stessa.

Teorema 16 *Sia*[1]

$$\gamma_n : \quad z = z_n(t) \qquad t \in [a,b]$$

una successione di curve (ciascuna $z_n(t)$ è di classe C^1 a tratti) e supponiamo

1. *$z_n(t) \in \Omega$ per ogni n e per ogni $t \in [a,b]$;*

[1] eventualmente riparametrizzando le curve si può assumere che il parametro di ciascuna di esse vari nel medesimo intervallo $[a,b]$.

2. esista una curva $z(t)$ in Ω (di classe C^1 a tratti) per cui:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |z_n'(t)-z'(t)|\,dt=0\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty} z_n(t_0)=z(t_0)\,,\quad \textit{per un } t_0\in[a,b]\,.$$

Sia $f(z)$ una funzione continua su una regione Ω. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n} f\,dz_n=\int_\gamma f\,dz\,. \tag{1.15}$$

Per la dimostrazione basta notare che

$$|z_n(t)-z(t)|\le|z_n(t_0)-z(t_0)|+\int_{t_0}^t|z_n'(s)-z'(s)|\,\mathrm{d}s\to 0$$

e quindi $\lim z_n(t)=z(t)$ uniformemente su $[a,b]$. Dunque si ha anche

$$\lim\int_a^b|f(z_n(t))z_n'(t)-f(z(t))z'(t)|\,\mathrm{d}t=0\,.$$

L'asserto segue notando che

$$\begin{aligned}&\int_a^b|f(z_n(t))z_n'(t)-f(z(t))z'(t)|\,\mathrm{d}t\\&\le\int_a^b|f(z_n(t))|\,|z_n'(t)-z'(t)|\,\mathrm{d}t+\int_a^b|f(z_n(t))-f(z(t))|\,|z'(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

e che ambedue gli integrali a destra tendono a zero.

Questo risultato si usa in particolare quando una curva γ: $z(t)=x(t)+iy(t)$ con $z(t)\in C^1(a,b)$, si approssima mediante poligonali. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in N parti uguali mediante i punti t_k e costruiamo la poligonale di vertici nei punti $z(t_k)$. Sia $z_N(t)$ la poligonale, $z_N(t)=x_N(t)+iy_N(t)$. Applicando il teorema di Lagrange alle funzioni $x(t)$ ed $y(t)$ si vede che

$$\frac{z_N(t_{k+1})-z_N(t_k)}{t_{k+1}-t_k}=x'(\tau_k)+iy'(\tau_k)\,,\qquad \tau_k\in(t_k,t_{k+1})$$

e quindi

$$z_N'(t)\equiv z'(\tau_k)\qquad\forall t\in(t_k,t_{k+1})$$

(si noti che i punti t_k dipendono da N: $t_k=k(b-a)/N$). Si ha quindi

$$\lim_{N\to+\infty}\int_a^b|z_N'(t)-z'(t)|\,\mathrm{d}t=0\,,\qquad\lim_{N\to+\infty}[z_N(a)-z(a)]=0\,.$$

Dunque:

Corollario 17 *Sia $f(z)$ continua in una regione Ω che contiene il sostegno della curva γ parametrizzata da $z(t) \in C^1(a,b)$. Siano $z_N(t)$ le parametrizzazioni delle poligonali costruite come sopra. Si ha:*

$$\lim_{N\to+\infty} \int_a^b f(z_N(t)) z_N'(t)\, dt = \int_a^b f(z(t)) z'(t)\, dt$$

ossia $$\lim_{N\to+\infty} \int_a^b f(z_N)\, dz_N = \int_a^b f(z)\, dz\,.$$

Capitolo 2

Le funzioni olomorfe

La *teoria delle funzioni* (ossia, "delle funzioni olomorfe") si può fare iniziare presentando una versione delle proprietà degli integrali delle forme differenziali, che va sotto il nome di *Teorema integrale di Cauchy,* ed esaminandone la relazione con la derivata di una funzione da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ definita come limite del rapporto incrementale. *Si noti infatti che tra numeri complessi può farsi il quoziente, cosa impossibile tra vettori, e questa è la differenza fondamentale tra funzioni da* $\mathbf{R}^2$ *in* $\mathbf{R}^2$ *e le funzioni da* $\mathbf{C}$ *in* $\mathbf{C}$.

2.1 Il teorema integrale di Cauchy

Ricordiamo la formula (1.14):

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = \int_\gamma u \,\mathrm{d}x - v \,\mathrm{d}y + i \int_\gamma v \,\mathrm{d}x + u \,\mathrm{d}y$$

che mostra che l'integrale $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z$ è somma di due integrali di forme differenziali. Se accade che γ è una curva in una regione di Jordan Ω e se *ambedue* le forme differenziali sono esatte, allora l'integrale è nullo.

Adattando le notazioni, dal Teorema 1.6 si trova:

Teorema 18 (Teorema integrale di Cauchy) *Sia Ω una regione di Jordan e supponiamo che la funzione $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ abbia le seguenti proprietà:*

- *le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono di classe $C^1(\Omega)$;*
- *valgano le uguaglianze seguenti:*

$$u_x(x,y) = v_y(x,y)\,, \qquad u_y(x,y) = -v_x(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega\,. \tag{2.1}$$

Sotto queste condizioni,

$$\int_\gamma f\, dz = 0$$

per ogni curva chiusa regolare a tratti γ il cui sostegno è in Ω.

Questo teorema è importantissimo e nel prossimo paragrafo ne vedremo le relazioni con la derivabilità della funzione $f(z)$.

2.2 La derivata

Riprendiamo la definizione di derivata vista, nel caso di alcuni esempi, al paragrafo 1.3, e riformuliamola in generale.

I numeri complessi costituiscono un campo e quindi è lecito studiare i rapporti incrementali

$$\frac{f(z) - f(z)}{z - z_0}\,.$$

L'esistenza di una norma su $\mathbf{C}$ permette di studiarne il limite per $z \to z_0$. Se questo esiste esso si chiama la DERIVATA di $f(z)$ in z_0:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z)}{z - z_0} = f'(z_0)\,.$$

La stessa dimostrazione come nel caso delle funzioni di variabile reale mostra:

Teorema 19 *Se $f(z)$ è derivabile in z_0 essa è ivi continua.*

Gli esempi visti al paragrafo 1.3 mostrano che la derivata può esistere o meno, e questo è atteso; mostrano anche l'esistenza di funzioni $f(z) = f(x, +iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ che non sono derivabili nonostante che u e v siano di classe C^∞.

In pratica, la derivabilità in un solo punto ha ben poco interesse nella teoria delle funzioni di variabile complessa. Piuttosto, interessa studiare le funzioni che sono derivabili in ciascun punto di una regione.

Si noti che gli intorni dei punti in $\mathbf{C}$ sono dischi: h tende a zero prendendo tutti i valori in dischi centrati in 0. In particolare, se la derivata esiste, i limiti calcolati con $h = x + i0$ ed $x \to 0$ e con $h = 0 + iy$ ed $y \to 0$ esistono e sono uguali. Dunque, se esiste $f'(z_0)$ esistono anche ambedue le derivate parziali in (x_0, y_0) sia di $u(x, y)$ che di $v(x, y)$. Queste non sono indipendenti, come vediamo nei due seguenti teoremi 20 e 21, *che sono importantissimi.*

Teorema 20 *Se $f'(z)$ esiste per ogni z in Ω, $z = x + iy$, allora valgono le uguaglianze*

$$u_x(x,y) = v_y(x,y)\,, \qquad u_y(x,y) = -v_x(x,y) \tag{2.2}$$

e inoltre

$$\begin{aligned} &f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y) \\ &= \frac{1}{2}\left\{u_x(x,y) + v_y(x,y) - i[u_y(x,y) - v_x(x,y)]\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dim. Il calcolo è immediato:

$$\lim_{h\to 0\ h\in\mathbf{R}} \frac{u(x+h,y) + iv(x+h,y) - u(x,y) - iv(x,y)}{h} = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

e questo limite è $f'(z)$ e quindi è anche uguale a

$$\lim_{k\to 0\ k\in\mathbf{R}} \frac{u(x,y+k) + iv(x,y+k) - u(x,y) - iv(x,y)}{ik} = -iu_y(x,y) + v_y(x,y)\,.$$

Dunque valgono le uguaglianze (2.2) e le espressioni (2.3) per la derivata. ∎

Le equazioni (2.2) sono *importantissime* e vanno sotto il nome di CONDIZIONI DI CAUCHY–RIEMANN e queste equazioni *caratterizzano le funzioni olomorfe* nel senso che si ha anche:

Teorema 21 *Siano $u(x,y)$ e $v(x,y)$ due funzioni* di classe C^1 su una regione Ω. *Ossia abbiano su Ω derivate parziali continue. Si definisca*

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)\,.$$

Se le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ soddisfano alle condizioni di Cauchy–Riemann su Ω, allora la funzione $f(z)$ è derivabile ed $f'(z)$ è continua.

La dimostrazione è un po' noiosa e per non interrompere il discorso è posposta alla fine di questo paragrafo.

Le funzioni $f(z)$ che sono derivabili con continuità su una regione Ω si chiamano FUNZIONI OLOMORFE.

E' bene dire che il requisito della continuità nella definizione precedente potrebbe rimuoversi, grazie al seguente risultato, che non proviamo:

Teorema 22 *se la funzione* continua *$f(z)$ è derivabile in ciascun punto della regione Ω allora la sua derivata $f'(z)$ è continua.*

Osservazione 23 Un risultato analogo al Teorema 22 non vale per funzioni da $\mathbf{R}$ in sé:

$$\text{sia} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases} \qquad \text{si ha} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos 1x & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ è derivabile su $\mathbf{R}$ ma la sua derivata è discontinua. ∎

Le condizioni di Cauchy-Riemann compaiono nel Teorema 18, che ora può riformularsi come segue:

Teorema 24 (Teorema integrale di Cauchy**)** *Sia $f(z)$ olomorfa in una regione di Jordan Ω e sia γ una curva semplice e chiusa in Ω. Vale*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,.$$

Non è azzardato dire che tutta la teoria delle funzioni olomorfe discenda da questo risultato.

La proprietà di essere una funzione olomorfa è molto forte e restrittiva. I due risultati seguenti sono un primo suggerimento di questo fatto.

Lemma 25 *Se due curve γ ed η hanno le proprietà che giustificano la formula (1.8), la formula (1.8) implica che*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\eta f(z)\, dz\,. \tag{2.4}$$

Lemma 26 *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa su una regione Ω. Supponiamo inoltre che essa prenda valori reali. Allora, essa è costante.*

Dim. Se la funzione prende valori reali allora $v(x, y)$ è identicamente zero e quindi $u_x(x, y)$ ed $u_y(x, y)$ sono identicamente nulle su Ω per le condizioni di Cauchy–Riemann e quindi anche $u(x, y)$ è costante. ∎

Lemma 27 *Sia $f(z)$ olomorfa su un disco D su cui $|f(z)|$ è costante. Allora $f(z)$ stessa è costante su D.*

Dim. Per ipotesi, su D vale

$$|f(x + iy)|^2 = |u(x, y) + iv(x, y)|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y) = c\,.$$

Proviamo che $f(z)$ stessa è costante. Questo è ovvio se $c = 0$. Sia quindi $c > 0$. Derivando e usando le condizioni di Cauchy–Riemann si trova

$$0 = 2[uu_x + vv_x] = 2[uu_x - vu_y]\,, \qquad 0 = 2[uu_y + vv_y] = 2[uu_y + vu_x]\,.$$

Moltiplicando la prima per u e la seconda per v e sommando si trova

$$0 = (u^2 + v^2)u_x = cu_x$$

e quindi $u_x = 0$, perché $c > 0$. In modo analogo si vede che $u_y = 0$ e quindi u è costante. Dalle condizioni di Cauchy–Riemann segue che anche v è costante. ∎

Dimostrazione del Teorema 21

Sia $h = \alpha + i\beta$. Scriviamo

$$f(z+h) - f(z) = u(x+\alpha, y+\beta) - u(x,y) + i[v(x+\alpha, y+\beta) - v(x,y)]\,.$$

Essendo le due funzioni u e v di classe C^1, si può applicare a ciascuna di esse il teorema della media

$$\begin{aligned} u(x+\alpha, y+\beta) - u(x,y) &= u_x(x_1,y_1)\alpha + u_y(x_1,y_1)\beta \\ v(x+\alpha, y+\beta) - v(x,y) &= v_x(x_2,y_2)\alpha + v_y(x_2,y_2)\beta \end{aligned}$$

con (x_1, y_1) e (x_2, y_2) punti opportuni nel rettangolo di vertici (x, y), $(x+\alpha, y)$, $(x, y+\beta)$, $(x+\alpha, y+\beta)$.

Quando α e β tendono a zero sia (x_1, y_1) che (x_2, y_2) tendono ad (x, y).

Usando le condizioni di Cauchy–Riemann scriviamo

$$\begin{aligned} &f(z+h) - f(z) = [u_x(x_1,y_1) + iv_x(x_2,y_2)]\alpha + [u_y(x_1,y_1) + iv_y(x_2,y_2)]\beta \\ &= [u_x(x_1,y_1) + iv_x(x_2,y_2)]\alpha + [-v_x(x_1,y_1) + iu_x(x_2,y_2)]\beta \\ &= [u_x(x_1,y_1) + iv_x(x_2,y_2)]\alpha + i[u_x(x_2,y_2) + iv_x(x_2,y_2)]\beta \\ &= [u_x(x_1,y_1) + iv_x(x_2,y_2)](\alpha + i\beta) \\ &+ i\left\{[u_x(x_2,y_2) - u_x(x_1,y_1)] + i[v_x(x_1,y_1) - v_x(x_2,y_2)]\right\}\beta\,. \end{aligned}$$

Essendo $\beta = \mathcal{I}m\, h$, vale $|\beta/h| < 1$ e inoltre la parentesi graffa tende a zero per $h \to 0$ perché, per ipotesi, le funzioni u e v sono di classe C^1. La parentesi quadra tende a $[u_x(x,y) + iv_x(x,y)]$ così che

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = [u_x(x,y) + iv_x(x,y)]\,.$$

Ciò prova l'esistenza della derivata in ciascun punto. Inoltre, da questa formula si vede che $f'(z)$ è continua perché sia $u_x(x,y)$ che $v_x(x,y)$ sono funzioni continue. ∎

Introduciamo infine due notazioni. L'uguaglianza (2.3) suggerisce di introdurre la notazione $\partial/\partial z$, definita da

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x+iy) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right] = f'(z)$$

mentre le condizioni di Cauchy–Riemann (2.2) suggeriscono l'introduzione della notazione $\partial/\partial \bar{z}$, definita da

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x+iy) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} f + i\frac{\partial}{\partial y} f\right] = \frac{1}{2}[u_x + iv_x + iu_y - v_y]\,.$$

Usando questa notazione, le condizioni di Cauchy–Riemann si scrivono

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0\,.$$

2.2.1 Primitive

Sia $f(z)$ una funzione da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$, definita su una regione Ω. *NON si richiede che la regione Ω sia di Jordan.* Si chiama PRIMITIVA di $f(z)$ una funzione $F(z)$, anch'essa definita su Ω, e tale che

$$F'(z) = f(z) \qquad \forall z \in \Omega\,.$$

Ovviamente

Teorema 28 *Se la funzione continua $f(z)$ ammette primitiva su Ω e se γ è una curva in Ω allora*

$$\int_\gamma f\, dz$$

dipende solo dagli estremi di γ (ossia, ha il medesimo valore per tutte le curve con i medesimi estremi). Se la curva è chiusa l'integrale è nullo.

Dim. Basta notare che

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(z(t))\,\mathrm{d}t = F(z(b)) - F(z(a))\,.\end{aligned}$$

Se la curva è chiusa si ha $z(b) = z(a)$ e l'integrale è nullo. ∎

Vale anche il viceversa:

Teorema 29 *Sia $f(z)$ una funzione continua su Ω. Se*

$$\int_\gamma f\, dz = 0$$

su tutte le curve chiuse in Ω (e basta controllare sui soli poligoni, o anche sui soli triangoli, grazie al Corollario 17) allora la funzione $f(z)$ ammette una primitiva.

Dim. Si fissi un punto $z_0 \in \Omega$. Ogni $z \in \Omega$ si connette a z_0 mediante una poligonale (si ricordi che Ω è un aperto connesso). Indichiamo con P_z una poligonale che connette z_0 con z e sia

$$F(z) = \int_{P_z} f\,\mathrm{d}z\,.$$

La funzione $F(z)$ è univoca perché per ipotesi l'integrale non dipende dalla particolare poligonale scelta per connettere z_0 con z, ma solo dai suoi estremi; e quindi solo da z, dato che z_0 si intende fissato.

Mostriamo che $F(z)$ è derivabile, con derivata $f(z)$.

Per calcolare $F(z+h)$ scegliamo una poligonale che congiunge z_0 con z e estendiamola a $z+h$ (con $h \in \mathbf{C}$) mediante il segmento

$$S\ :\quad z+th\,,\qquad t\in[0,1]\,.$$

Allora,

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_S f\,\mathrm{d}z = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)h\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t\,.$$

Essendo $f(z)$ continua, il limite dell'ultimo integrale per $h\to 0$ è

$$F'(z) = \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z)\,. \quad \blacksquare$$

Osservazione 30 Si noti che il teorema precedente può dimostrarsi anche richiedendo che l'integrale di $f(z)$ sia nullo sulle sole poligonali chiuse. E' sufficiente per questo che esso sia nullo lungo tutti i triangoli contenuti in Ω. ∎

Naturalmente, se una primitiva esiste, ne esistono infinite. Vale però:

Teorema 31 *Se $F(z)$ e $G(z)$ sono olomorfe sulla medesima regione Ω ed hanno derivata uguale, la loro differenza è costante su Ω.*

Dim. Sia $H(z) = F(z) - G(z)$. Vale $H'(z) = 0$ su Ω.

Sia $H(z) = U(z) + iV(z)$. La condizione $H'(z) = 0$ e l'espressione (2.3) per la derivata mostrano che

$$U_x = 0\,, \qquad V_x = 0\,.$$

Dalle condizioni di Cauchy–Riemann si trova anche che

$$U_y = 0\,, \qquad V_y = 0$$

e quindi U e V ammettono ambedue le derivate parziali in ciascun punto di Ω, e queste sono nulle. E quindi le funzioni sono costanti. ∎

Vediamo infine un esempio di calcolo di integrale.

Esempio 32 Sia $f(z) = (z - z_0)^n$ e sia γ la circonferenza

$$\gamma\ :\quad z(t) = z_0 + e^{it}\,, \qquad t \in [0, 2k\pi]\,.$$

Il numero k è intero positivo. Si osservi che la circonferenza è orientata positivamente e che essa è semplice solo quando $k = 1$.

Si ha:

$$\begin{aligned}\int_\gamma (z - z_0)^n \,\mathrm{d}z &= \int_0^{2k\pi} e^{int} i e^{it} \,\mathrm{d}t = i \int_0^{2k\pi} e^{i(n+1)t} \,\mathrm{d}t \\ &= i \int_0^{2k\pi} [\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t] \,\mathrm{d}t \\ &= i \int_0^{2k\pi} \cos(n+1)t \,\mathrm{d}t - \int_0^{2k\pi} \sin(n+1)t] \,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Calcolando esplicitamente gli integrali si vede che

$$\int_\gamma (z - z_0)^n \,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n < -1 \\ 2k\pi i & \text{se} \quad n = -1 \\ 0 & \text{se} \quad n \geq 0\,. \end{cases}$$

Il caso $n = -1$ è particolarmente importante:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = k \tag{2.5}$$

e k è il numero dei giri che la circonferenza fa intorno all'origine. Il valore dell'integrale in (2.5) si chiama L'INDICE della circonferenza rispetto al suo centro. Vedremo in seguito come generalizzare quest'osservazione. ∎

Osservazione 33 Osserviamo:

1. Il calcolo fatto mostra che la funzione $1/z^2$ ha integrale nullo sulle circonferenze centrate nell'origine e quindi su ogni curva di Jordan la cui regione interna contiene l'origine. Nonostante il fatto che questa funzione non verifiche le condizioni del teorema 24: queste condizioni sono solamente sufficienti.

2. Sia $f(z)$ olomorfa su una generica regione Ω. Non è vero che $f(z)$ debba ammettere primitive *su* Ω, come mostra l'esempio della funzione $f(z) = 1/z$ definita su $\Omega = \mathbf{C} - \{0\}$. Che essa non ammetta primitiva discende dal teorema 28 perchè l'integrale di $f(z)$ su una circonferenza di centro l'origine non è nullo. ∎

Concludiamo con alcune osservazioni.

Osservazione 34 Le condizioni del Teorema 28 sono solamente sufficienti, come mostra il caso della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^n}\,, \qquad z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\,,$$

con n intero *maggiore* di 1 ed $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ (si veda ancora l'Esempio 32). In questo caso la primitiva esiste ed è

$$F(z) = \frac{1}{(1-n)z^{n-1}}\,.$$

Ricordiamo ora che la funzione $\operatorname{Log} z$ è derivabile, con derivata uguale a $1/z$. Si sa che l'integrale di quest'ultima funzione su una generica curva chiusa γ in $\mathbf{C}-\{0\}$ può non essere nullo; ma ciò non contraddice il Teorema 28 perchè la funzione $\operatorname{Log} z$ non è olomorfa su $\mathbf{C} - \{0\}$. ∎

2.2.2 Curve equipotenziali

Sia $F(z)$ una primitiva di $f(z)$ e sia

$$F(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)\,, \qquad f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)\,.$$

Supponiamo inoltre che $f(z)$ non si annulli su Ω.

Ricordiamo le formule (2.3)

$$F'(z) = U_x + iV_x = -iU_y + V_y = u + iv\,.$$

Uguagliando $F'(z)$ ad $f(z)$ si trova

$$\nabla U = (u, -v)\,, \qquad \nabla V = (v, u) \tag{2.6}$$

ossia U e V sono i potenziali rispettivamente dei campi vettoriali

$$u\mathbf{i} - v\mathbf{j}\,, \qquad v\mathbf{i} + u\mathbf{j}\,.$$

Consideriamo le curve equipotenziali γ_1 e γ_2 implicitamente definite da

$$U(x, y) = c\,, \qquad V(x, y) = d$$

(usando il teorema delle funzioni implicite si vede che queste equazioni definiscono implicitamente due curve nell'intorno dei punti (x, y) nei quali $F'(x + iy) = f(x + iy) \neq 0$).

Non necessariamente queste curve si intersecano. Supponiamo che esse si intersechino per $x = x_0$ ed $y = y_0$.

Si sa che $\nabla U(x_0, y_0)$ è ortogonale alla γ_1 e che $\nabla V(x_0, y_0)$ è ortogonale alla γ_2. Usiamo (2.6) per calcolare il prodotto scalare di questi vettori:

$$\nabla U(x_0, y_0) \cdot \nabla V(x_0, y_0) = 0\,,$$

ossia, *le curve equipotenziali rispettivamente del potenziale U e del potenziale V sono mutuamente perpendicolari nei punti in cui si intersecano.*

2.2.3 Il caso della funzione $z \to \bar{z}$

L'esempio 32 mostra che la funzione $f(z) = 1/z$ non ha primitiva su una regione di Jordan che contiene 0, dove però non è ovunque definita. Questa funzione è olomorfa e quindi ammette primitiva in qualunque regione di Jordan che non contiene 0.

E' naturale chiedersi se una funzione ovunque definita e continua debba avere primitiva. L'esempio che ora studiamo mostra che ciò non accade.

La funzione che a z associa il suo coniugato $\bar{z}$ è continua su $\mathbf{C}$. Si è già visto, al paragrafo 1.3, che non è olomorfa. Mostriamo che essa non ammette primitiva. Ciò si può vedere nel modo più semplice notando che esistono curve chiuse γ tali che

$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z \neq 0\,.$$

Per esempio, se γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1, su essa $\bar{z} = 1/z$ e quindi

$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \neq 0\,.$$

E' un po' più lungo, ma istruttivo, arrivare a questo risultato direttamente dalla definizione di primitiva. Supponiamo per assurdo che una primtiva esista, ossia che esista una funzione $F(z)$ tale che $F'(z) = \bar{z}$. Allora $F(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$ ed $F'(x+iy) = f(x+iy) = x - iy$.

Si ricordi che $F'(x+iy) = U_x(x,y) + iV_x(x,y)$ e quindi

$$U_x(x,y) = x\,, \qquad V_x(x,y) = -y\,.$$

Dunque,

$$U(x,y) = (x^2/2) + \phi(y)\,.$$

D'altra parte, la $F(z)$ essendo una primitiva è olomorfa e quindi per essa valgono le condizioni di Cauchy-Riemann Da $U_y = -V_x = y$ si trova che $\phi(y) = (y^2/2)$. Dunque,

$$U(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}\,.$$

Invece, da $V_x(x,y) = -y$, si trova

$$V(x,y) = -xy + \psi(y)$$

e quindi

$$V_y(x,y) = -x + \psi'(y) = U_x(x,y) = +x\,.$$

Quest'ultima uguaglianza è impossibile, e quindi la primitiva $F(x+iy)$ di $f(z) = \bar{z}$ non esiste.

Vedremo al par. 3.2.1 che avremmo potuto dedurre che $\bar{z}$ non ammette primitive dal fatto che la derivata di una funzione olomorfa è ancora una funzione olomorfa.

2.2.4 La funzione logaritmo e le potenze di base ed esponente complessi

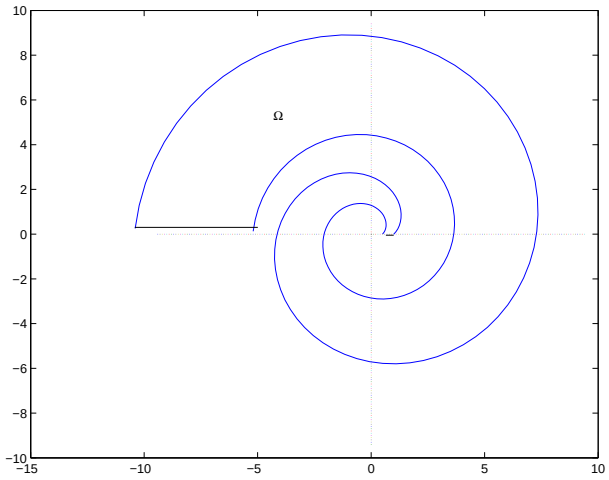
Abbiamo già definito i logaritmi dei numeri complessi non nulli e quindi le funzioni logaritmo,

$$\log z = \log|z| + i\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi i\,, \tag{2.7}$$

una funzione per ciascun valore dell'intero k. Abbiamo notato che queste sono funzioni olomorfe, con derivata $1/z$, a parte che nei punti dell'asse reale negativo. Però abbiamo notato che l'asse reale negativo entra in queste questioni solo a causa della particolare scelta dell'argomento principale; e quindi le funzioni logaritmo, così definite, hanno proprietà che non sono indipendenti dal

modo scelto per rappresentarla. Vediamo ora un modo diverso di introdurre la funzione logaritmo, che mostra che in realtà non si incontrano problemi se si decide di lavorare in una *regione di Jordan* Ω qualsiasi, ma che *non contiene* l'origine. Si noti che tale regione può spiraleggiare intorno all'origine, come nella figura 2.1.

Figura 2.1:



Consideriamo la funzione $1/z$ su Ω. Questa funzione è olomorfa su Ω e quindi è dotata di primitiva per il Teorema 28. Si noti che per questo si usa l'ipotesi che Ω è una regione di Jordan che non contiene 0.

Si fissi un punto $z_0 \in \Omega$ e sia w_0 uno dei suoi logaritmi,

$$w_0 = \log|z_0| + i\mathrm{Arg}\, z_0 + 2k_0\pi i \tag{2.8}$$

per un certo numero intero k_0. Sia P_z una poligonale che connette il punto z_0 fissato col generico punto $z \in \Omega$, senza uscire da Ω.

Consideriamo la funzione

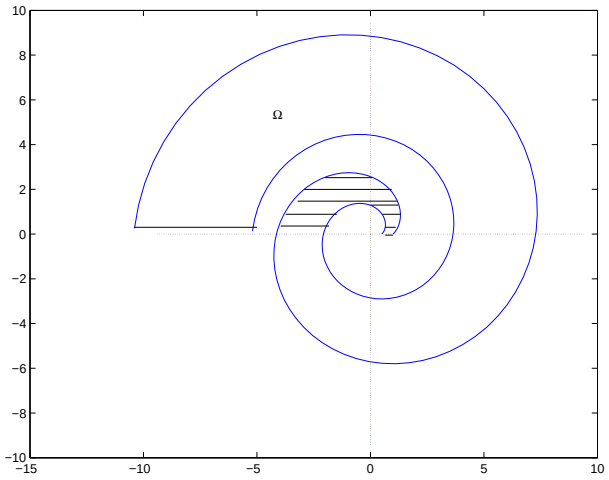
$$L(z) = w_0 + \int_{P_z} \frac{1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Questa è una funzione olomorfa su Ω che in z_0 prende il valore w_0 ed è primitiva di $1/z$; ossia, la derivata di $L(z)$ è $1/z$ e quindi la sua differenza da una qualsiasi delle funzioni (2.7) è costante *sulla regione in cui ambedue sono definite e derivabili.*

La differenza è zero per quella particolare funzione che ha $k = k_0$.

Se Ω interseca l'asse reale negativo, la differenza non è nulla su tutta Ω perché le funzioni (2.7) non sono continue nei punti dell'asse reale negativo. La figura 2.2 mostra una sottoregione di Ω su cui la differenza è costante.

Figura 2.2:



Ricapitolando queste considerazioni, *chiameremo la funzione $L(z)$ una funzione logaritmo su Ω, e la chiameremo il* LOGARITMO PRINCIPALE *se è stata costruita scegliendo $k_0 = 0$ in (2.8).* Essa si indicherà col simbolo $\log z$ oppure, nel caso del logaritmo principale, col simbolo $\operatorname{Log} z$.

Dato che $e^{\log|z|+i\operatorname{Arg} z+2k_0\pi i} = z$, lo stesso vale per $L(z)$ nella parte tratteggiata di Ω. *Vedremo* che ciò vale anche nella parte rimanente di Ω, si veda il paragrafo 3.2.3 e l'esempio 75. Dunque, *quando un punto mobile $z \in \Omega$ traversa l'asse reale negativo, la funzione $L(z)$ passa dall'una all'altra determinazione della funzione* $\log z$.

Osservazione 35 Il fatto che i valori di $\operatorname{Log} z$ passano dall'una all'altra delle funzioni in (2.8) mostra che considerare come "diverse" le funzioni in (2.8), una diversa funzione per ciascun valore di k, è artificioso. Si ritrova quindi anche nello studio delle primitive che lo studio delle funzioni multivoche viene naturale nella teoria delle funzioni di variabile complessa. ∎

Le funzioni potenza ed esponenziale con base ed esponente complessi

Ponendo

$$z^a = e^{a\operatorname{Log},z}$$

si trova che le potenze z^a sono definite e sono funzioni olomorfe in ogni regione di Jordan che non contiene l'origine. Se la regione contiene l'asse reale positivo, allora z^a prende valori reali su tale asse.

Sia ora Ω una regione di Jordan e sia $f(z)$ una funzione olomorfa su Ω, *che non si annulla.* Fissiamo un punto $z_0 \in \Omega$ e la poligonale P_z congiunga z_0 col generico punto $z \in \Omega$. Si definisce

$$\mathrm{Log}\, f(z) = \int_{P_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, \mathrm{d}\zeta$$

e questa funzione è olomorfa su Ω. Ciò fatto, si definisce, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$,

$$f^\alpha(z) = e^{\alpha \mathrm{Log}\, f(z)} \ :$$

su Ω si possono definire tutte le potenze di $f(z)$, e queste vengono ad essere funzioni olomorfe di z; ricordiamo, *purché $f(z)$ non si annulli si Ω, e purché Ω sia una regione di Jordan.*

2.2.5 Esempi di funzioni olomorfe e formule di derivazione

Dal Teorema 26, le funzioni

$$z \to \Re e\, z\,, \qquad z \to \mathcal{I}m\, z\,, \qquad z \to |z|\,, \qquad z \to \mathrm{Arg} z$$

non sono olomorfe. Abbiamo già notato che l'ultima non è nemmeno continua sull'asse reale negativo mentre *una funzione olomorfa su una regione* Ω *essendo ivi derivabile è continua.*

Inoltre, *le usuali regole di derivazione della somma, del prodotto, del quoziente e della funzione composta valgono anche per funzioni di variabile complessa,* con le medesime dimostrazioni come nel caso delle funzioni di una variabile reale. Di conseguenza, dato che $f(z) = z$ è ovviamente derivabile, con derivata uguale ad 1, *i polinomi e le funzioni razionali sono funzioni olomorfe.*

Mostriamo:

Teorema 36 *La funzione* $z \to e^z$ *è olomorfa su* $\mathbf{C}$ *e coincide con la sua funzione derivata.*

Dim. Infatti,

$$e^z = e^{x+iy} = [e^x \cos y] + i[e^x \sin y]\,.$$

Dunque, per questa funzione,

$$u(x,y) = [e^x \cos y]\,, \qquad v(x,y) = [e^x \sin y]\,.$$

E' immediato verificare che queste funzioni sono di classe C^1 su $\mathbf{R}^2$, e verificano le condizioni di Cauchy–Riemann.

Dalla (2.3) si trova immediatamente che la derivata di e^z è

$$u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z\,. \quad \blacksquare$$

Di conseguenza, grazie alle formule di Eulero, *le funzioni trigonometriche sono olomorfe e si vede facilmente che per esse valgono le usuali regole di derivazione come nel caso reale.*

Si è notato che la funzione $\mathrm{Log}\, z$ non è continua e quindi nemmeno olomorfa su $\mathbf{C}$, e ciò mostra che è necessaria una certa cautela nel derivare funzioni inverse. Se però si sa "a priori" che $g(z)$ è la funzione inversa della funzione olomorfa $f(z)$ e che $g(z)$ stessa è olomorfa, allora si può applicare la regola della derivazione della funzione composta all'uguaglianza

$$f(g(z)) = 1$$

e trovare per $g'(z)$ l'usuale formula,

$$g'(z) = 1/f'(g(z))\,. \tag{2.9}$$

Torneremo su questo problema al paragrafo 2.2.7.

Le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari

Ciascuna delle determinazioni della funzione logaritmo è una funzione olomorfa in una regione che non interseca l'asse reale negativo. Ciò è già noto perché si è si è visto che essa ha ivi differenza costante con la funzione $L(z)$ definita al paragrafo 2.2.4. Quindi anche le funzioni potenza ed esponenziale sono ivi olomorfe.

Ha un interesse vedere direttamente che ciascuna determinazione della funzione logaritmo e della radice sono funzioni olomorfe usando direttamente le formule di Cauchy-Riemann perché questa è l'occasione per rappresentarle in coordinate polari.

Notiamo prima di tutto che se

$$x = \rho\cos\theta\,, \qquad y = \rho\sin\theta$$

allora le funzioni inverse ρ e θ sono funzioni di x e di y.

Essendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, si calcola immediatamente che, se $\rho \neq 0$,

$$\rho_x = \frac{x}{\rho}\,, \quad \rho_y = \frac{y}{\rho}\,.$$

In modo analogo si vede che se $\theta \neq 0$ si ha:

$$\theta_y = \frac{x}{\rho^2}\,. \tag{2.10}$$

Deriviamo ora ambedue i membri dell'uguaglianza $y = \rho\sin\theta$ rispetto ad x. Si trova

$$0 = \rho_x \sin\theta + \rho(\cos\theta)\theta_x$$

e quindi, se $\cos\theta \neq 0$,

$$\theta_x = -\frac{\rho_x}{\rho}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\rho_x}{\rho}\frac{y}{x} = -\frac{x}{\rho^2}\frac{y}{x} = -\frac{y}{\rho^2}\,. \tag{2.11}$$

Osservazione 37 Per la validità di queste formule si richiede $\rho \neq 0$. Noi le abbiamo provate supponendo anche $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta \neq 0$ ma questa condizione immediatamente si rimuove. Infatti, studiando lo jacobiano della trasformazione $(\rho,\theta) \to (x,y)$ si vede che questo non si annulla per $\rho \neq 0$ e quindi $\rho(x,y)$ e $\theta(x,y)$ sono di classe C^1 sul piano (x,y) privato dell'origine; e quindi ivi si estendono per continuità le formule che abbiamo trovato. ∎

Sia ora

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)\,.$$

Sia $U(\rho,\theta)$ la funzione che nel punto (ρ,θ) prende come valore $u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. In modo analogo definiamo $V(\rho,\theta)$. E' immediato notare che U e V sono di classe C^1, nelle variabili ρ e θ, se u e v sono di classe C^1 nelle variabili x ed y.

Viceversa, se $U(\rho,\theta)$ è di classe C^1 su una regione $\tilde\Omega$ del piano (ρ,θ) non contenente l'asse $\rho=0$ allora $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono di classe C^1 nella regione immagine di $\tilde\Omega$. Inoltre, si calcola che:

$$U_\rho = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta\,.$$

Se valgono le condizioni di Cauchy–Riemann per la coppia (u,v), deve aversi

$$U_\rho = v_y\cos\theta - v_x\sin\theta\,.$$

Analogamente,

$$V_\theta = -v_x\rho\sin\theta + v_y\rho\cos\theta\,.$$

Si intende che le funzioni u e v sono calcolate nel punto $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

Dunque, se le condizioni di Cauchy–Riemann valgono, si ha anche

$$\rho U_\rho = V_\theta \qquad \text{e analogamente} \qquad \rho V_\rho = -U_\theta\,. \tag{2.12}$$

Viceversa, le (2.12) implicano le condizioni di Cauchy–Riemann per la coppia (u,v). Infatti,

$$\begin{aligned} u_x &= U_\rho\frac{x}{\rho} - U_\theta\frac{y}{\rho^2}\\ v_y &= V_\rho\frac{y}{\rho} + V_\theta\frac{x}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho}U_\theta\frac{y}{\rho} + \rho U_\rho\frac{x}{\rho^2}\end{aligned}$$

da cui

$$u_x = v_y \qquad \text{e analogamente} \qquad u_y = -v_x\,.$$

Introduciamo ora

$$F(\rho,\theta) = U(\rho,\theta) + iV(\rho,\theta)\,.$$

Con questa notazione, le (2.12) valgono se e solo se

$$i\rho F_\rho = F_\theta\,. \tag{2.13}$$

Usando le formule trovate, studiamo le funzioni radice e logaritmo. Una determinazione della radice quadrata di z è la funzione

$$f(z) = \sqrt{\rho}[\cos\theta/2 + i\sin\theta/2]$$

nella regione

$$\rho>0\,, \qquad -\pi\le\theta<\pi\,. \tag{2.14}$$

Usiamo (2.13) per studiarla.

E' ovvio che questa funzione, come funzione delle due variabili reali ρ e θ, equivalentemente x ed y, è di classe C^1. Si vede che è olomorfa notando che su questa regione vale la condizione (2.13).

Analogo discorso vale per ogni determinazione di $z^{1/n}$.

In modo analogo si tratta la funzione

$$f(z) = \log|z| + i\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi i\,,$$

con k fissato, ancora sulla regione (2.14). Applicando il teorema della funzione implicita alle relazioni

$$x=\rho\cos\theta\,, \qquad y=\rho\sin\theta$$

valide per $\rho > 0$ e $-\pi \leq \theta < \pi$, si vede che la funzione (ρ, θ), come funzione di x e di y, è di classe C^1 e quindi lo stesso vale per ciascuna funzione $\log|z| + i\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi i$, in $-\pi < \theta < \pi$.

Un calcolo immediato mostra che la condizione (2.13) è soddisfatta e quindi mostra che ciascuna delle funzioni $\log z$ è olomorfa.

Usando la (2.9) si vede ora che ciascuna delle determinazioni della funzione $\log z$, su $-\pi < \mathrm{Arg} z < \pi$, ha per derivata $1/z$, per ogni z nella regione (2.14). Infatti,

$$e^{\mathrm{Log}\, z + 2k\pi i} = z$$

e quindi

$$1 = e^{\mathrm{Log}\, z + 2k\pi i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (\mathrm{Log}\, z + 2k\pi i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (\mathrm{Log}\, z + 2k\pi i)\, z\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (\mathrm{Log}\, z + 2k\pi i) = \frac{1}{z}\,.$$

Osservazione 38 Osserviamo ora un fatto imbarazzante: $\theta = -\pi$ non ha una relazione intrinseca con le funzioni logaritmo (e nemmeno con le radici), ma dipende solo dalla nostra scelta per l'argomento principale. Avessimo scelto per esempio $0 \leq \theta < 2\pi$ avremmo trovato funzioni olomorfe nel piano privato dell'asse reale positivo; avessimo scelto $\pi/2 \leq \theta < 5\pi/2$ avremmo trovato funzioni olomorfe ovunque, salvo che sull'asse immaginario positivo.

Quest'osservazione suggerisce di considerare le funzioni inverse come *funzioni multivoche.* E' però questo un aspetto della teoria delle funzioni di variabile complessa che possiamo appena accennare, nel prossimo paragrafo e nel paragrafo 3.10. ∎

2.2.6 Punti di diramazione di funzioni olomorfe

Sia Ω_0 una regione di Jordan, z_0 un suo punto e $\Omega = \Omega_0 \setminus \{z_0\}$. Sia $f(z)$ una funzione che è olomorfa in Ω. Il punto z_0, Ω si dice PUNTO DI DIRAMAZIONE[1] quando ogni suo intorno contiene una curva chiusa γ la cui immagine γ_f non è chiusa. Dunque, $f(z)$ è discontinua in ogni intorno di z_0.

Gli esempi che abbiamo già esaminato mostrano che $z_0 = 0$ è punto di diramazione per le funzioni $z \to |z|^{1/n} e^{i(\mathrm{Arg}\, z)/n}$ e $z \to \mathrm{Log}\, z$.

I punti di diramazione si incontrano spesso trattando le funzioni inverse di funzioni che non sono biunivoche e questo suggerisce un modo di trattare le funzioni che è stato introdotto da Riemann. Accenniamo all'idea, considerando l'esempio della funzione $\mathrm{Log}\, z$. Consideriamo prima di tutto la funzione

$$f(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

che trasforma ogni striscia

$$(2k - 1)\pi \leq y < (2k + 1)\pi$$

[1] al paragrafo 3.10 vedremo una definizione più generale di punto di diramazione.

su tutto il piano complesso privato dell'origine.

Fissiamo l'attenzione sulla striscia

$$-\pi \leq y < \pi.$$

Quando si rappresenta l'immagine della striscia sul piano complesso in realtà si considera la trasformazione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ data da

$$(x, y) \to (e^x \cos y, e^x \sin y)\,.$$

Consideriamo invece la trasformazione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$

$$(x, y) \to (e^x \cos y, e^x \sin y, y) = (\xi, \eta, \zeta)\,. \tag{2.15}$$

In questo modo l'immagine di $y \to (\xi, \eta, \zeta)$ con x fissato è una spira di un'elica.

La successiva striscia è caratterizzata da

$$\pi \leq y < 3\pi$$

e la trasformazione (2.15) rappresenta ora $y \in [\pi, 3\pi)$, con lo stesso valore di x, nella successiva spira; e la striscia $\pi \leq y < 3\pi$ ha immagine che ora *non* si sovrappone a quella calcolata prima.

In questo modo si ha una rappresentazione dell'esponenziale come funzione biunivoca da $\mathbf{C}$ su una superficie di $\mathbf{R}^3$; e quindi la funzione inversa viene ora ad essere univoca.

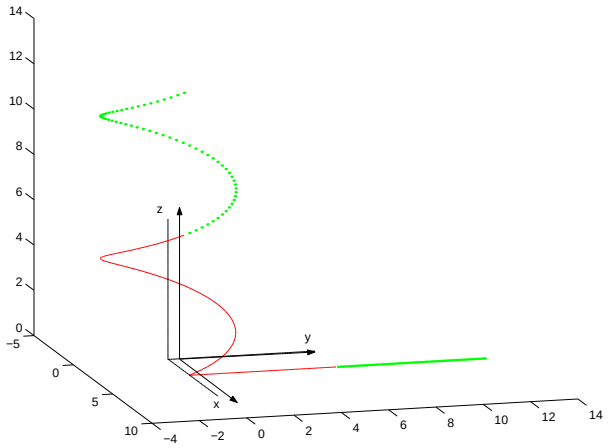
La superficie così costruita si chiama la SUPERFICIE DI RIEMANN della funzione $\log z$ e si può visualizzare come costituita da infiniti "fogli", ciascuno copia di $\mathbf{C}$, incollati in modo da descrivere una specie di elica.

Ricapitolando, il procedimento che abbiamo illustrato suggerisce di leggere la funzione $\log z$ non come funzione multivoca da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ ma come funzione univoca dalla sua superficie di Riemann a $\mathbf{C}$.

Un procedimento analogo si può fare per le funzioni radice, ma questo caso presenta una particolarità che ora vediamo. Illustriamola considerando la radice quadrata. Si parte dalla funzione $f(z) = z^2$. L'immagine del semipiano superiore, $\mathcal{I}m\, z \geq 0$ è tutto il piano complesso e lo stesso vale per il semipiano $\mathcal{I}m\, z \leq 0$. Allora rappresentiamo l'immagine di $\mathcal{I}m\, z \geq 0$ su un foglio e quando z tende all'asse reale negativo invece di proseguire su tale foglio proseguiamo su un secondo foglio, su cui rappresentiamo l'immagine di $\mathcal{I}m\, z < 0$, esattamente come abbiamo fatto per la funzione logaritmo.

Però ora, quando z tende all'asse reale positivo, invece di passare su un terzo foglio, si torna sul primo, in accordo col fatto che la funzione inversa prende due soli valori; ossia abbiamo ancora una specie di elica, ma limitata

Figura 2.3:



ai soli primi due giri; e l'elica non rimane "scompleta" dopo due soli giri ma si richiude su se stessa.

Questa è, descritta in modo intuitivo, la superficie di Riemann associata alla funzione z^2 (si dice la superficie di Riemann della radice quadrata) e la funzione z^2 da $\mathbf{C}$ sulla superficie di Riemann ad essa associata è invertibile.

In modo analogo si costruisce la superficie di Riemann di $\sqrt[n]{z}$, che è una superficie composta da n "fogli", col primo e l'ultimo tra loro incollati come detto nel caso della radice quadrata.

2.2.7 Funzioni olomorfe, jacobiano e trasformazioni conformi

Torniamo a considerare le relazioni tra le funzioni di classe C^1 da $\mathbf{R}^2$ in sé e le funzioni olomorfe.

Ricordiamo che la funzione $(x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$ da $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ si può rappresentare mediante la notazione complessa, associando alla coppia (x, y) il numero complesso $z = x + iy$ e introducendo $w = u + iv$, così che la trasformazione si rappresenta anche come

$$w = f(z)\,.$$

In questo modo si vede la funzione $(u(x, y), v(x, y))$ come trasformazione dal piano della variabile z al piano della variabile w.

Viceversa, una funzione da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ si può anche vedere come funzione da $\mathbf{R}^2$ in sé. Si veda il paragrafo 1.1.4.

La matrice jacobiana e le funzioni olomorfe; derivata della funzione inversa

Ricordiamo che se $(u(x,y), v(x,y))$ è una funzione di classe C^1 definita su una regione Ω la sua MATRICE JACOBIANA è

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{bmatrix}.$$

Il determinante della matrice jacobiana si chiama lo JACOBIANO DELLA TRASFORMAZIONE.

Si noti che sia la matrice jacobiana che lo jacobiano sono funzioni di (x,y).

La funzione $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ è *localmente* invertibile nell'intorno di ogni punto (x_0, y_0) nel quale lo jacobiano è non nullo. Più precisamente è noto il risultato seguente:

Teorema 39 *Se* $\det J(x_0,y_0) \neq 0$ *esistono un intorno* U *di* (x_0,y_0) *ed un intorno* V *di* $(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))$ *con queste proprietà:*

- *la trasformazione* $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ *è iniettiva e suriettiva come trasformazione da* U *in* V *e quindi ammette funzione inversa definita su* V *e con immagine uguale a* U*. Indichiamo con* $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ *la funzione inversa così che*

$$\begin{aligned} (x(u(x,y),v(x,y)), y(u(x,y),v(x,y))) &= (x,y)\,, \\ (u(x(u,v),y(u,v)), v(x(u,v),y(u,v))) &= (u,v)\,. \end{aligned}$$

- *la matrice jacobiana e lo jacobiano della funzione inversa sono*

$$J^{-1}(x(u,v), y(u,v))\,, \qquad \frac{1}{\det J(x(u,v), y(u,v))}\,.$$

Particolarizziamo questi risultati al caso in cui $(u(x,y), v(x,y))$ rappresenta una funzione olomorfa. Siano quindi $u(x,y)$ e $v(x,y)$ rispettivamente la parte reale ed immaginaria di una funzione olomorfa $f(z)$. La funzione $(x,y) \to (u(x,y), v(x,y))$ è una trasformazione di classe C^1 da $\mathbf{R}^2$ in sé e inoltre valgono le condizioni di Cauchy-Riemann. Dunque

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ -u_y(x,y) & u_x(x,y) \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

e quindi lo jacobiano è

$$u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\,.$$

Possiamo così enunciare:

Teorema 40 *Sia $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ una funzione olomorfa. Lo jacobiano della funzione $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ è non nullo in un punto (x,y) se e solo se $f'(x+iy) \neq 0$. In tale punto lo jacobiano è positivo.*

Si ricordi che lo jacobiano è positivo quando la trasformazione a cui esso corrisponde conserva l'orientazione di $\mathbf{R}^2$; equivalentemente, quando l'area orientata di un triangolo ha il medesimo segno prima e dopo la trasformazione.

Ciò detto, esaminiamo nuovamente il problema della derivazione della funzione inversa di una funzione olomorfa.

Teorema 41 *Sia $f(z)$ olomorfa su una regione Ω, e con derivata non nulla. La funzione è localmente invertibile e la sua inversa è olomorfa.*

Dim. Sia

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)\,.$$

Si è appena visto che lo jacobiano della trasformazione di classe C^1 su $\mathbf{R}^2$

$$(x,y) \to (u(x,y), v(x,y))$$

non si annulla e quindi la trasformazione è localmente invertibile con inversa di classe C^1.

Si è visto in(2.16) che la matrice jacobiana della trasformazione è

$$J = \begin{bmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ -u_y(x,y) & u_x(x,y) \end{bmatrix}$$

e quindi (J^T indica la matrice trasposta)

$$J^T(x,y)J(x,y) = \begin{bmatrix} u_x^2 + u_y^2 & 0 \\ 0 & u_x^2 + u_y^2 \end{bmatrix}$$

così che

$$\begin{aligned} J^{-1}(x,y) &= \frac{1}{u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)} J^T(x,y) \\ &= \frac{1}{u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)} \begin{bmatrix} u_x(x,y) & -u_y(x,y) \\ u_y(x,y) & u_x(x,y) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'altra parte, la matrice $J^{-1}(x(u,v), y(u,v))$ è la matrice jacobiana della trasformazione inversa:

$$J^{-1}(x(u,v), y(u,v)) = \begin{bmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{bmatrix} . \tag{2.18}$$

Uguagliando (2.17) e (2.18) si vede che

$$x_u = y_v \,, \qquad y_u = -x_v \,,$$

ossia la trasformazione $(u,v) \to (x(u,v), y(u,v))$ è di classe C^1 e verifica le condizioni di Cauchy–Riemann. Per il teorema 21, la funzione

$$g(u+iv) = x(u,v) + iy(u,v) \,,$$

inversa della funzione $f(x+iy)$, è olomorfa. ∎

Esempio 42 La funzione $f(z) = e^z$ è olomorfa e si è visto che la sua derivata è ancora e^z e quindi non si annulla. Fissiamo un punto z_0 ed il valore $w_0 = e^{z_0}$. Il teorema 41 afferma che esistono un intorno U di z_0 ed un intorno V di $w_0 = e^{z_0}$ ed un'unica funzione $g(w)$ definita su V a valori in U, tale che $e^{g(w)} = w$. Dunque, $g(z)$ è una delle determinazioni della funzione $\log z$. Per esempio, se $z_0 = 0$ e quindi $e^{z_0} = 1$ allora $g(w)$ deve prendere valore in un intorno di $z_0 = 0$ se w è in un intorno di 1; e quindi $g(z) = \operatorname{Log} z$.

Se invece $z_0 = 2\pi i$ e quindi ancora $w_0 = e^{z_0} = 1$. Però ora $g(w)$ deve prendere valori in un intorno di $2\pi i$ e quindi deve essere $g(z) = \operatorname{Log} z + 2\pi i$.

Inoltre, sempre dal Teorema 41, la funzione inversa $g(z)$ è olomorfa e, dalla formula (2.9), per ogni determinazione del logaritmo, ossia per ogni k,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\operatorname{Log} z + 2k\pi i \right) = \frac{1}{z} \,.$$

Si ritrova quindi quanto già visto al paragrafo 2.2.5: tutte le determinazioni della funzione $\log z$ sono derivabili, con derivata $1/z$. ∎

Osservazione 43 Con riferimento all'esempio 42, sia $z_0 = i\pi/2$. In questo caso, $w_0 = e^{z_0} = -1$ e si è visto che esiste una *funzione olomorfa* $g(w)$ tale che $e^{g(w)} = w$, definita in un intorno di -1. Questa funzione quindi differisce da ciascuna delle funzioni $\operatorname{Log} w + 2k\pi i$, che sono discontinue sull'asse reale negativo. Questa "stranezza" si è già incontrata e discussa anche al paragrafo 2.2.4 e all'esempio 75. ∎

Le trasformazioni conformi

Sia Ω una regione di $\mathbf{R}^2$ e siano γ e $\tilde{\gamma}$ due curve in Ω, parametrizzate da

$$z = z(t)\,, \qquad z = \tilde{z}(t)\,,$$

con $t \in [a, b]$ in ambedue i casi (si sa che questa condizione non è restrittiva).

Supponiamo che le due curve si intersechino in un punto in cui le due parametrizzazioni sono derivabili, ossia che per un valore $t_0 \in (a, b)$ valga

$$z(t_0) = \tilde{z}(t_0) = z_0 = x_0 + iy_0\,.$$

Definiamo L'ANGOLO TRA LE DUE CURVE nel loro punto comune z_0. Notiamo per questo che le due rette

$$z = z_0 + z'(t_0)(t - t_0)\,, \qquad z = \tilde{z}_0 + \tilde{z}'(t_0)(t - t_0)$$

sono, per definizione, le rette tangenti alle due curve nel punto di intersezione. Per *angolo tra le due curve* si intende quello formato dalle loro tangenti nel punto comune. Facendo uso della notazione dei numeri complessi, è facile esprimere tale angolo: questo è l'angolo tra i vettori rappresentati da $z'(t_0)$ e $\tilde{z}'(t_0)$ e questo è l'argomento del quoziente dei numeri complessi corrispondenti,

$$\mathrm{Arg}\frac{z'(t_0)}{\tilde{z}'(t_0)}\,.$$

Sia ora $f(z)$ una funzione olomorfa definita su Ω. Indichiamo con γ_f e $\tilde{\gamma}_f$ le curve immagine di γ e di $\tilde{\gamma}$ mediante la trasformazione f:

$$\gamma_f\ :\quad w = f(z(t))\,,\quad \tilde{\gamma}_f\ :\quad w = f(\tilde{z}(t)) \qquad t \in [a, b]\,.$$

Ricordiamo che le due curve γ e $\tilde{\gamma}$ si intersecano nel punto $z_0 = x_0 + iy_0$ e quindi le loro immagini γ_f e $\tilde{\gamma}_f$ si intersecano in $f(z_0)$. Supponiamo che $f'(z_0) \neq 0$. Calcoliamo l'angolo tra γ_f e $\tilde{\gamma}_f$,

$$\mathrm{Arg}\frac{f'(z_0)z'(t_0)}{f'(z_0)\tilde{z}'(t_0)} = \mathrm{Arg}\frac{z'(t_0)}{\tilde{z}'(t_0)}\,.$$

Abbiamo così provato che

Teorema 44 *Una funzione olomorfa conserva l'angolo tra le curve nei punti nei quali la sua derivata non si annulla.*

Una trasformazione da una regione di $\mathbf{R}^2$ che conserva gli angoli si dice CONFORME. Dunque

Teorema 45 *Se $f(z)$ è olomorfa su Ω, e se la sua derivata non si annulla su Ω, essa definisce una trasformazione conforme su Ω.*

Esistono anche trasformazioni che conservano gli angoli, ossia trasformazioni conformi, che non si ottengono rappresentando funzioni olomorfe. Un esempio è la trasformazione

$$z \to \bar{z}\,.$$

se però la trasformazione conforme si ottiene per mezzo di una funzione olomorfa essa ha una ulteriore proprietà che ora illustriamo.

Abbiamo già notato che se $u(x,y)$, $v(x,y)$ sono parti reali ed immaginarie di una funzione olomorfa $f(x+iy)$ allora lo jacobiano della trasformazione è $u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)$, strettamente positivo se $f'(z)$ non si annulla.

Dunque, *una funzione olomorfa la cui derivata non si annulla su Ω definisce una trasformazione conforme che inoltre conserva l'orientazione.* Un esempio di trasformazione conforme che *non* conserva l'orientazione è la trasformazione $z \to \bar{z}$.

Si chiamano TRASFORMAZIONI CONFORMI DIRETTE quelle trasformazioni conformi che conservano l'orientazione:

Corollario 46 *Una funzione olomorfa su Ω che non si annulla rappresenta una trasformazione conforme diretta.*

Lo studio delle trasformazioni conformi verrà ripreso al paragrafo 3.9.

Osservazione sui "teoremi fondamentali del calcolo differenziale"

Nella teoria delle funzioni di *una* variabile reale, si chiamano "teoremi fondamentali del calcolo differenziale" varie formulazioni del teorema di Rolle: *sia $f(x)$ continua per $x \in [a,b]$, a valori in $\mathbf{R}$ e tale che $f(a) = f(b) = 0$. Sia inoltre $f(x)$ derivabile in ciascun punto di (a,b). Esiste un punto $c \in (a,b)$ nel quale la derivata si annulla.*

In particolare una funzione da $\mathbf{R}$ in sé, derivabile e periodica, ha derivata nulla in infiniti punti.

E' importante notare che asserti analoghi *non valgono per le funzioni olomorfe.*

Esempio 47 La funzione $f(z) = e^z$ è olomorfa e periodica. Si è visto che la sua derivata è

$$f'(z) = e^z$$

mai nulla. ∎

Cerchiamo di capire questa importante discrepanza tra le funzioni continuamente derivabili di una variabile reale e quelle continuamente derivabili di una variabile complessa.

Ricordiamo che la dimostrazione del teorema di Rolle si basa sul teorema di Fermat, che a sua volta dipende dalla *regola dei segni: il prodotto di numeri di segno concorde è positivo.* Noi non abbiamo introdotto una relazione di ordine tra i numeri complessi. E' però possibile introdurne infinite. Per esempio si può introdurre L'ORDINAMENTO LESSICOGRAFICO: $x + iy$ viene prima di $x' + iy'$ se $x < x'$ oppure se $x = x'$ ma $y < y'$. In questo modo i numeri "positivi", ossia maggiori di 0, sono quelli di parte reale strettamente positiva oppure quelli con la parte reale nulla e parte immaginaria positiva. Però, la "regola dei segni" non vale. Per esempio, $i \cdot i = -1$. Si può provare: *la regola dei segni non vale tra i numeri complessi, qualsiasi sia la relazione d'ordine che si voglia usare.*

E' questa la ragione per cui gli analoghi dei "teoremi fondamentali del calcolo differenziale" non valgono per le funzioni olomorfe.

2.3 Serie di potenze e serie di Laurent

Abbiamo visto fino ad ora degli *esempi particolari* di funzioni olomorfe. Una *classe* di funzioni olomorfe è offerta dalle SERIE DI POTENZE

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \,. \tag{2.19}$$

Una funzione siffatta è sempre definita in z_0 e, può essere, in nessun altro punto. In tal caso ovviamente essa non è una funzione olomorfa. Vale però:

Teorema 48 (DI ABEL) *Se la serie (2.19) converge in un punto $z_1 \neq z_0$ allora essa* converge assolutamente *in ogni punto z tale che*

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0| \,.$$

Se $0 < \epsilon < |z_1 - z_0|$ la serie converge uniformemente sul disco $D(z_0, \epsilon)$ di centro z_0 e raggio ϵ. Dunque la somma della serie è una funzione continua.

Dim. Le affermazioni seguenti si provano esattamente come nel caso delle serie a termini reali:

- se una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ converge allora $\lim \alpha_n = 0$. Dunque la convergenza della serie (2.19) implica che

$$\lim a_n (z_1 - z_0)^n = 0 \quad \text{e quindi} \quad \lim |a_n| \, |z_1 - z_0|^n = 0 \,. \tag{2.20}$$

- se $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ converge (e si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE.

Usando queste proprietà procediamo a provare il teorema. Per semplificare le notazioni, supponiamo che sia[2] $z_0 = 0$ e fissiamo un punto z per cui $|z| < |z_1|$. Vogliamo provare la *convergenza assoluta* della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ossia vogliamo provare la convergenza della *serie a termini positivi*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, |z|^n \, .$$

Dato che $|z| < |z_1|$ (disuguaglianza stretta) esiste r tale che

$$|z| < r < |z_1| \quad \text{ossia} \quad \frac{|z|}{|z_1|} < \frac{r}{|z_1|} = q \in (0,1).$$

Dunque,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| \, |z_1|^n) \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| \, |z_1|^n) \, q^n \, .$$

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n$ per ipotesi converge e quindi il suo termine generale tende a zero. In particolare, esiste M tale che

$$|a_n| \, |z_1|^n < M$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, |z|^n \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} q^n < +\infty \, . \tag{2.21}$$

La disuguaglianza (2.21) vale per ogni z con $|z| < r < |z_1|$ e prova che la convergenza della serie è *uniforme* nel disco $|z| < r$.

La somma della serie è una funzione continua essendo limite uniforme di una successione di funzioni continue. ∎

Di conseguenza,

$$\left\{ z \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ converge} \right\}$$

[2] a questo caso ci si riconduce rinominando le variabili: $z - z_0$ si rinomina z così che $z_1 - z_0$ si rinomina z_1.

è un disco centrato in z_0 (che potrebbe essere ridotto al solo punto z_0, o essere tutto il piano complesso). Il suo interno, se non vuoto, si dice DISCO DI CONVERGENZA della serie, e il suo raggio R, $0 \leq R \leq +\infty$ si dice RAGGIO DI CONVERGENZA.

Il raggio di convergenza di una serie di potenze si calcola facendo uso delle stesse formule che sono note per le serie di potenze reali: se i coefficienti a_n non sono mai nulli e se esiste

$$\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

allora questo limite, finito o meno, è uguale al raggio di convergenza.

In generale, il raggio di convergenza si può calcolare con la seguente FORMULA DI HADAMARD:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{dove si intende} \quad \begin{cases} \frac{1}{0} = +\infty \\ \frac{1}{\infty} = 0\,. \end{cases}$$

la cui dimostrazione è posposta.

La formula di Hadamard ha una conseguenza importante. Dato che

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1\,,$$

le tre serie

$$\textbf{a)} \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n\,, \qquad \textbf{b)} \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n (z-z_0)^{n+1}\,, \qquad \textbf{c)} \ \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

hanno il medesimo raggio di convergenza.

E' chiaro che la seconda serie è ottenuta integrando termine a termine la prima e la terza è ottenuta derivandola termine a termine.

Dato che la serie di potenze converge uniformemente su ogni curva nel disco di convergenza (aperto) si sa dal Teorema 15:

$$a_0 + \int_{\gamma_z} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \right] \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n (z-z_0)^{n+1}$$

dove γ_z è una qualunque curva che congiunge z_0 col punto z. Per vedere quest'uguaglianza basta integrare sulla curva particolare parametrizzata da

$$t \mapsto tz + z_0\,, \qquad t \in [0,1]\,.$$

Si ha dunque

Teorema 49 *Le serie di potenze si integrano termine a termine su ogni curva contenuta nel disco di convergenza (aperto).*

Dunque, quando $R > 0$, si pone il problema di sapere se la terza serie rappresenti la derivata della prima. La risposta è affermativa[3]:

Teorema 50 *Sia* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *e sia positivo il raggio di convergenza della serie. Allora,* $f(z)$ *è olomorfa nel suo disco di convergenza e in ogni punto del disco di convergenza, vale*

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}\,.$$

Dim. Infatti, integrando termine a termine la serie **c)**, e aggiustando la costante, si trova la serie **a)**, che quindi ne è la primitiva. ∎

Il Teorema 50 mostra che la derivata di una funzione $f(x)$ rappresentata mediante una serie di potenze è a sua volta una serie una funzione olomorfa rappresentata da una serie di potenze (col medesimo raggio di convergenza). Il teorema si può quindi applicare nuovamente. Iterando questo argomento si trova:

Teorema 51 *ZLAteo:olomseriepot2ITERato Sia* $f(z)$ *una funzione rappresentata da una serie di potenze con raggio di convergenza* R non nullo. *Le sue derivate di ogni ordine sono a loro volta funzioni olomorfe rappresentate da serie di potenze tutte col medesimo raggio di convergenza* R.

Più in generale si chiamano SERIE DI LAURENT le serie di potenze con esponenti interi sia positivi che negativi, ossia le serie della forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n\,,$$

ovviamente mai definite per $z = z_0$. Per definizione, la somma della serie di Laurent è la somma delle due serie di potenze una in z e l'altra in $1/z$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

e quindi le proprietà delle serie di Laurent discendono immediatamente da quelle delle serie di potenze. La serie di potenze positive di $1/(z - z_0)$ converge

[3] questo risultato è un caso molto particolare del Teorema 79.

per $|1/(z-z_0)| < \tilde{r}$ ossia per $|z-z_0| > 1/\tilde{r} = r$, la serie di potenze positive di $(z-z_0)$ converge per $|z-z_0| < R$; e quindi *la serie di Laurent converge se e solo se $r < R$. Se $r < R$ chiameremo* CORONA DI CONVERGENZA *la corona circolare*

$$r < |z-z_0| < R\,.$$

In tale corona la serie converge assolutamente, e converge uniformemente nei compatti in essa contenuti.

Inoltre:

Teorema 52 *La somma di una serie di Laurent è olomorfa nella corona di convergenza, supponendo che questa esista. La sua derivata ed i suoi integrali lungo curve contenute nella corona di convergenza si calcolano termine a termine:*

$$\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}\,.$$

Dimostrazione della formula di Hadamard.

Per semplicità di notazioni sia $z_0 = 0$ e sia

$$\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Studiamo prima di tutto il caso $\alpha = +\infty$. Mostriamo che in questo caso il raggio di convergenza è nullo. Sia $z \neq 0$ e scegliamo $\beta \in (0, |z|)$. Scegliamo un qualsiasi k tale che $k\beta > 1$ e notiamo che, per infiniti n, vale

$$\sqrt[n]{|a_n|} > k \quad \text{e quindi} \quad |a_n z^n| > (k\beta)^n\,.$$

La serie di potenze quindi non converge perché $k\beta > 1$.

Consideriamo ora il caso in cui

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \in (0, +\infty)\,.$$

Sia z un numero per cui

$$|z| > \frac{1}{\alpha}\,.$$

Vogliamo provare che la serie di potenze non converge in z. Ciò implicherà che il raggio di convergenza non supera $1/\alpha$.

Sia r un numero tale che

$$\frac{1}{\alpha} < r < |z|\,.$$

Da $(1/r) < \alpha$ segue che per infiniti indici vale

$$\frac{1}{r} < \sqrt[n]{|a_n|}$$

e quindi

$$\frac{|z|^n}{r^n} < |a_n z^n| \,.$$

Essendo $|z| > r$ si ha

$$\limsup |a_n z^n| = +\infty$$

e la serie non converge.

Dunque, $R \leq 1/\alpha$.

Se $\alpha = 0$ è ancora vero che $R < 1/\alpha$, perchè si intende $1/0 = +\infty$.

Ricapitolando, a questo punto sappiamo che

$$R \leq \frac{1}{\alpha}\,, \qquad \text{intendendo} \qquad \begin{cases} \frac{1}{\infty} = 0 \\ \frac{1}{0} = \infty \,. \end{cases}$$

Proviamo la disuguaglianza opposta.

Se $\alpha = +\infty$ il disco di convergenza non c'è e niente va provato.

Consideriamo ancora prima di tutto il caso $0 < \alpha < +\infty$ e sia $|z| < 1/\alpha$. Proviamo che in tal caso la serie converge.

Essendo $|z| < 1/\alpha$, avremo

$$|z| = \frac{c}{\alpha}\,, \quad |a_n z^n| = |a_n| \frac{c^n}{\alpha^n} \quad \text{con} \quad 0 \leq c < 1 \,.$$

Sia $\epsilon > 0$. Esiste N_ϵ tale che per $n > N_\epsilon$ si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \epsilon \tag{2.22}$$

e quindi

$$|a_n z^n| = \frac{|a_n|}{\alpha^n} c^n < \left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right)^n c^n \,. \tag{2.23}$$

A questa disuguaglianza si arriva per ogni $\epsilon > 0$. Essendo $c \in (0,1)$, si può scegliere $\epsilon = \epsilon_c$ tale che

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) c < 1 \quad \text{e la (2.23) vale per } n < N_{\epsilon_c} = N_c \,.$$

In questo modo si vede che i termini della serie di potenze sono dominati (per n grande) da quelli di una serie numerica convergente, e quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

converge.

Consideriamo infine il caso $\alpha = 0$ e z qualsiasi. In questo caso la (2.22) vale con $\alpha = 0$. Si sia scelto ϵ tale che $\epsilon|z| = c < 1$. Si ha

$$|a_n z^n| < c^n$$

e ancora la convergenza della serie di potenze segue per confronto con la serie geometrica.

In ambedue i casi $R \geq 1/\alpha$ e quindi vale l'uguaglianza $R = 1/\alpha$. ∎

2.4 Indice e omotopia

Passiamo ora a considerare una funzione che associa un numero intero alla coppia costituita da una curva chiusa e da un punto z_0 che non gli appartiene. Questo numero rappresenta, intuitivamente, il numero dei giri che la curva fa intorno a z_0, considerati positivi se la curva ruota in senso antiorario, negativi altrimenti.

Si veda l'esempio 32 per un caso particolare.

Sia Ω una regione di Jordan e sia z_0 un suo punto. Sia γ una *curva chiusa,* semplice o meno, il cui sostegno è in Ω e che non passa per il punto z_0. Definiamo

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \,,$$

si vedano le considerazioni dell'Esempio 32.

Dato che la curva γ non incontra z_0, l'integrale è ben definito ed è una funzione di classe C^∞ del parametro z_0, almeno finché z_0 varia senza incontrare il sostegno di γ. Mostriamo che questa funzione *prende valori interi e quindi è costante se z_0 si muove senza toccare γ.*

Teorema 53 *La funzione $I(\gamma, z_0)$ prende valori interi.*

Dim. Sia $z(t)$, $t \in [a, b]$ una parametrizzazione della curva γ. Ricordiamo che implicitamente supponiamo sempre che le parametrizzazioni (continue su $[a, b]$) siano derivabili con continuità, salvo un numero finito di punti. Si ha:

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{z'(t)}{z(t) - z_0} \, \mathrm{d}t \,.$$

Sia

$$\phi(t; z_0) = \int_a^t \frac{z'(r)}{z(r) - z_0} \, \mathrm{d}r \,, \qquad t \in [a, b] \quad \text{così che} \begin{cases} \phi(a; z_0) = 0 \\ \phi(b; z_0) = I(\gamma, z_0) \,. \end{cases}$$

La funzione $t \mapsto \phi(t; z_0)$ a valori complessi di variabile reale t è continua e continuamente derivabile, perché $z(t) \neq z_0$ per ogni t e si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t; z_0) = \frac{z'(t)}{z(t) - z_0}\,.$$

Dunque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-\phi(t;z_0)}(z(t) - z_0) = e^{-\phi(t;z_0)}\left\{-\phi'(t; z_0)(z(t) - z_0) + z'(t)\right\} = 0$$

e quindi la funzione $e^{-\phi(t;z_0)}(z(t) - z_0)$ è costante. Uguagliando i valori assunti per a e per b si trova

$$e^{-\phi(a;z_0)}(z(a) - z_0) = (z(a) - z_0) = e^{-\phi(b;z_0)}(z(b) - z_0)\,.$$

Ricordando che la curva γ è chiusa, ossia che $z(a) = z(b)$, e che $z(a) - z_0 \neq 0$ si trova $e^{-\phi(b;z_0)} = 1$, ossia si trova che esiste un *intero* k, dipendente da z_0, per cui

$$2k\pi i = \phi(b; z_0) = I(\gamma, z_0) \tag{2.24}$$

come si voleva. ∎

Questo prova che $I(\gamma, z_0)$ è un numero intero che si chiama INDICE della curva γ rispetto al numero z_0 che non le appartiene.

Giustifichiamo ora l'interpretazione intuitiva dell'indice come "numero dei giri" della curva intorno a z_0.

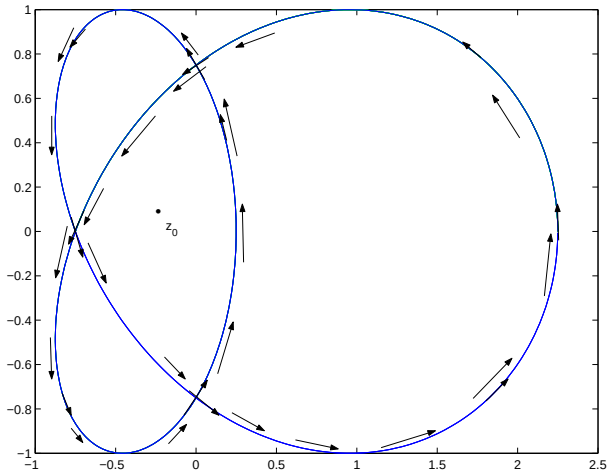
Consideriamo prima il caso di una curva semplice γ e supponimo che z_0 non appartenga alla curva. Quindi, la curva fa nessun giro intorno a z_0 se z_0 è nella regione esterna a γ e gira una sola volta intorno a z_0 se z_0 è nella regione interna.

Se z_0 è nella regione esterna a γ allora $I(\gamma, z_0) = 0$, essendo ottenuto come integrale su γ di una funzione che è olomorfa in una regione che contiene Ω_γ. Per calcolare $I(\gamma, z_0)$ quando z_0 è nella regione interna a γ, scegliamo una "piccola" circonferenza C di centro z_0, contenuta in Ω_γ. Il teorema di Cauchy ci dice che $I(\gamma, z_0) = I(C, z_0)$. Il valore $I(C, z_0)$ si è già calcolato all'Esempio 32 ed è uguale ad 1.

Più in generale, se γ è una curva percorsa k volte, per l'additività dell'integrale, l'indice è k volte l'indice che si ottiene percorrendo la curva una sola volta e si trova l'interpretazione dell'indice in questo caso particolare.

Nel caso della curva γ in figura 2.4, che gira più volte intorno a z_0, senza ripercorrere se stessa, si arriva alla medesima interpretazione spezzando la curva in tante curve semplici e chiuse.

Figura 2.4:



Osservazione 54 ricapitoliamo: il numero k in (2.24) dipende da k e da γ. La curva γ non è necessariamente semplice e quindi racchiude diverse regioni in ciascuna delle quali l'indice è costante. ∎

Per finire, consideriamo il caso seguente, che ci interesserà in seguito. Sia γ una curva *semplice e chiusa* orientata positivamente, il cui sostegno appartiene alla regione di Jordan Ω su cui una funzione $f(z)$ è olomorfa. Si è già introdotta la curva γ_f, immagine di γ mediante la funzione $f(z)$: se γ ha parametrizzazione $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, allora γ_f ha parametrizzazione $f(z(t))$, $t \in [a, b]$.

La curva γ_f è chiusa perché γ lo è, ma può essere che non sia semplice.

Supponiamo che $f(z)$ non si annulli su γ e consideriamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(z(t))z'(t)}{f(z(t))}\,\mathrm{d}t\,.$$

Quest'integrale è uguale ad ambedue gli integrali seguenti:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z\,, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_f} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w$$

e l'ultimo integrale è $I(\gamma_f, 0)$. Si ha quindi che

$$I(\gamma_f, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z\,.$$

Segue un semplice metodo grafico per il calcolo di $(1/2\pi i)\int_\gamma (f'/f)\,\mathrm{d}z$ (quando $f(z)$ non si annulla sul sostegno di γ) che è alla base di molti metodi grafici dell'ingegneria: si disegna la curva γ_f e se ne conta il numero dei giri intorno all'origine.

Naturalmente, i metodi grafici sono sempre approssimati. E' notevole il fatto che, in questo caso, il metodo grafico dà in realtà *valori esatti.* Infatti, dalla formula (1.15), il valore dell'integrale "varia di poco" quando γ "varia di poco" (sia la parametrizzazione che la sua derivata!) , purchè la deformazione applicata a γ non conduca γ_f ad incontrare 0, ossia non conduca γ ad incontrare uno zero di $f(z)$. Dato che l'indice prende valori interi, esso rimane costante sotto l'azione di piccole perturbazioni su γ, quali quelle che si incontrano nella rappresentazione numerica di γ e di γ_f.

2.4.1 Curve omotope

Noi accenneremo solamente a quest'argomento, il cui svolgimento rigoroso conduce alla TEORIA DELL'OMOTOPIA. Siano γ_1 e γ_2 due curve diverse. Non è restrittivo assumere che il parametro vari nel medesimo intervallo $[a,b]$ e per semplicità assumiamo che le parametrizzazioni siano di classe C^1. Diciamo che esse sono OMOTOPE se esiste una funzione $H(s,t)$ di classe C^1 di due variabili reali $s \in [0,1]$, $t \in [a,b]$, a valori complessi, tale che $H(0,t)$ parametrizzi γ_1 mentre $H(1,t)$ parametrizzi γ_2.

Se le due curve appartengono ad una regione Ω, si dice che esse sono *omotope in* Ω se i valori della funzione $H(s,t)$ appartengono ad Ω.

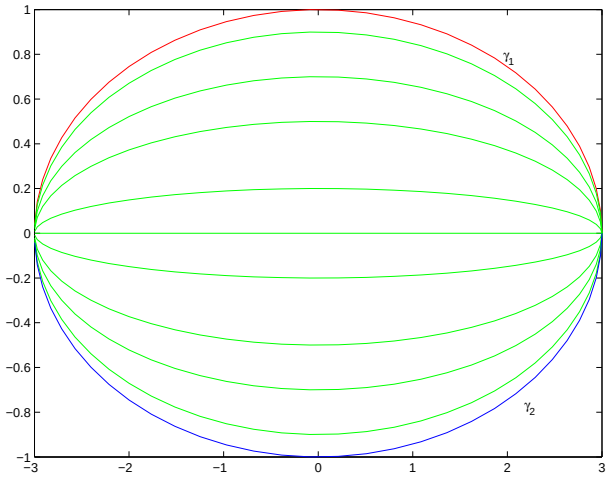
Per ogni valore intermedio $s_0 \in [0,1]$, la funzione $H(s_0,t)$ parametrizza una curva e per $s \sim 0$ la curva è "vicina" a γ_1 mentre per $s \sim 1$ è vicina a γ_2. Quindi la $H(s,t)$ parametrizza una deformazione continua di γ_1 in γ_2 e le due curve sono omotope in Ω quando è possibile *deformare con continuità una delle due, portandola a sovrapporsi all'altra, senza uscire da* Ω.

Nei casi più importanti, le curve γ_1 e γ_2 hanno gli estremi comuni oppure sono chiuse. Se esse hanno estremi comuni, si richiede anche $H(s,a) = H(s,b)$ per ogni $s \in [0,1]$. In tal caso una deformazione continua di γ_1 su γ_2 è illustrata dalla figura 2.5

Se le due curve γ_1 e γ_2 sono chiuse, nel parlare di omotopia si sottintende che ciascuna delle curve $t \to H(s,t)$ sia chiusa.

Richiediamo ora che le due curve γ_1 e γ_2 siano omotope rispetto ad una regione Ω su cui $f(z)$ è olomorfa e supponiamo che $f(z)$ non si annulli in Ω.

Figura 2.5:



Indicando con γ_s la curva di parametrizzazione $t \to H(s,t)$, si trova che

$$s \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z \tag{2.25}$$

è continua come funzione di $s \in [0,1]$ e quindi, prendendo valori interi, costante. Abbiamo interpretato il valore dell'integrali in (2.25) come il numero di giri intorono a 0 della curva immagine di γ_s mediante f. Dunque, la costanza della funzione in (2.25) si può interpretare come segue: *se due curve sono omotope in una regione Ω su cui $f(z)$ è olomorfa e non si annulla, le loro immagini mediante f fanno il medesimo numero di giri intorno all'origine.*

Omotopia e Teorema integrale di Cauchy

Le nozioni sulle curve omotope visto permettono una riformulazione utile del Teorema di Cauchy.

Le due curve chiuse γ_1 e γ_2 siano omotope rispetto ad una regione Ω su cui $f(z)$ è olomorfa e sia $H(s,t)$ la funzione che descrive l'omotopia delle due curve.

Indicando con γ_s la curva di parametrizzazione $t \to H(s,t)$, si trova che

$$s \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} f(z)\, \mathrm{d}z$$

è costante. Ciò suggerisce una diversa formulazione del Teorema di Cauchy, Teorema 24:

Teorema 55 (forma omotopica del teorema di Cauchy) *Siano γ_1 e γ_2 curve tra loro omotope in una generica regione Ω su cui $f(z)$ è olomorfa. Supponiamo che le due curve siano chiuse o che abbiano gli stessi estremi. Allora vale*

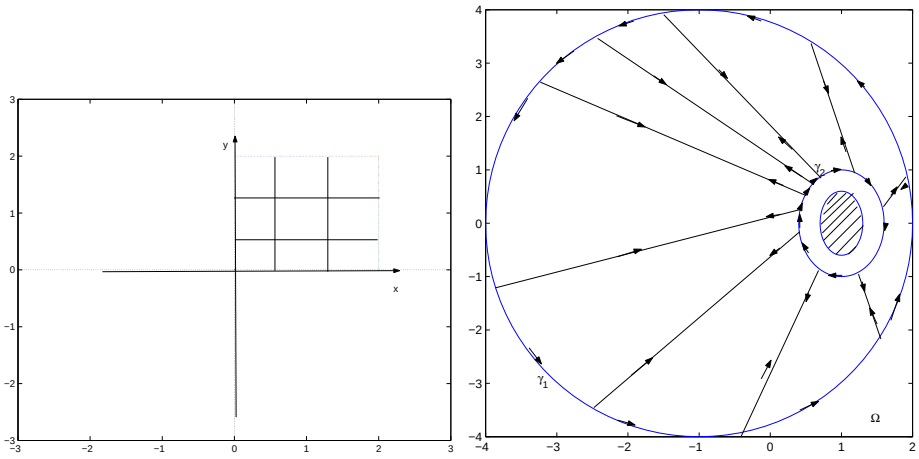
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Dim. (cenno) La dimostrazione del teorema è alquanto noiosa, ma l'idea della dimostrazione è semplice e ci limitiamo a presentarla. Sia $H(s,t)$ la funzione continua tale che $H(0,t)$ parametrizza γ_1 e $H(1,t)$ parametrizza γ_2.

Non è restrittivo assumere $t \in [0,1]$.

Dividiamo il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ in tanti piccoli quadrati, come nella figura 2.6 a sinistra e consideriamo l'immagine mediante $H(t,s)$ dei lati di tutti i quadrati ottenuti. Si trova una struttura del tipo di quella nella figura 2.6 a destra (le immagini dei lati sono state disegnate rettilinee per comodità di disegno, ma potrebbero non esserlo).

Figura 2.6:



I lati dei quadrati si trasformano in curve chiuse e su tali curve l'integrale è nullo. Sommando ciascuno degli integrali sui singoli quadrati e tenendo conto delle cancellazioni si trova l'asserto. ∎

Vediamo ora un caso estremo: per definizione, una curva (regolare) non può essere parametrizzata da una funzione costante. Supponiamo però che esista

una funzione $H(s,t)$ continua su $[0,1]\times[a,b]$ e tale che $H(0,t)$ parametrizzi una curva γ mentre $H(1,t)=z_0$ per ogni $t\in[a,b]$. In questo caso si dice che la curva γ è OMOTOPA AL PUNTO z_0.

E' ancora vero che

$$s\to\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_s} f(z)\,\mathrm{d}z$$

dipende con continuità da s e inoltre, per $s\to 0$, il limite è ora 0; e quindi la funzione è identicamente zero. Vale quindi

Corollario 56 *Se γ è omotopa ad un punto nella generica regione Ω allora*

$$\int_\gamma f\,dz=0$$

per ogni funzione $f(z)$ olomorfa su Ω.

Sottolineiamo che né il teorema 55 né il corollario 56 richiedono che Ω sia una regione di Jordan. Si potrebbe provare che tutti i teoremi che valgono per regioni di Jordan valgono anche per le regioni che sono semplicemente connesse secondo la definizione seguente: una regione Ω si dice SEMPLICEMENTE CONNESSA se ogni curva di Jordan di sostegno in Ω è omotopa ad un punto di Ω.

Capitolo 3

Proprietà fondamentali delle funzioni olomorfe

Come si è visto, il *Teorema integrale di Cauchy* è la riformulazione della formula di Green per funzioni $f(z)$ olomorfe in una regione di Jordan. Però la formula di Green si può adattare anche al caso di forme differenziali su regioni delimitate da due curve di Jordan, una nella regione interna dell'altra. Un tale adattamento si potrà fare anche per il *teorema integrale di Cauchy* e conduce ad una formula, detta la *formula integrale di Cauchy.* La teoria delle funzioni olomorfe è conseguenza di questa formula.

3.1 La formula integrale di Cauchy

Sia $f(z)$ olomorfa sulla *regione di Jordan* Ω e sia γ una curva di Jordan in Ω. La formula integrale di Cauchy mostra in particolare che i valori di $f(z)$ nella regione *interna* a γ sono univocamente individuati dai valori che la $f(z)$ assume sul sostegno di γ e inoltre vengono ad essere espressi mediante una *semplice* formula integrale. Si noti che niente di analogo vale per funzioni di classe C^1 di due variabili reali.

Più avanti vedremo che anche i valori che $f(z)$ assume nella regione *esterna* a γ sono individuati dai valori che essa assume sul sostegno di γ. Però, nessuna formula semplice permette di trovarli.

La formula integrale di Cauchy vale per curve chiuse, anche non semplici, di sostegno in Ω. In tale forma lo enunciamo anche se, di regola, lo useremo nel caso delle curve semplici.

Teorema 57 (FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY) *Sia* $f(z)$ olomorfa *in una* regione di Jordan Ω *e sia* γ *una curva in* Ω. *Sia* $z \in \Omega$ *un punto che* non

appartiene al sostegno di γ. *Vale:*

$$I(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,. \tag{3.1}$$

Dim. Limitiamoci a provare il teorema per il caso delle curve semplici. In questo caso, $I(\gamma, z) = 0$ quando z è nella regione esterna a γ e in tal caso l'integrale è nullo per il *Teorema di Cauchy,* Teorema 24. Dunque, in tal caso l'uguaglianza è verificata. Sia allora $z \in \Omega_\gamma$, la regione interna a γ. In questo caso $I(\gamma, z) = 1$ e dobbiamo provare che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Sia C_r una circonferenza di raggio r e centro z, con r così piccolo che C_r sia contenuta nella regione Ω_γ. Il *Teorema di Cauchy* mostra che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

In particolare, la funzione di r,

$$r \to \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

è costante e quindi

$$\lim_{r\to 0+}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Il limite si calcola facilmente notando che

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + f(z)\end{aligned}$$

(se la curva non è semplice, l'addendo $f(z)$ viene moltiplicato per $I(\gamma, z)$). Basta quindi calcolare

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

E' immediato notare che questo limite è nullo. Infatti, il modulo del rapporto incrementale

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|$$

è limitato, diciamo da $M = 2|f'(z)|$, per $|\zeta - z|$ piccolo. Dunque, per il Teorema 14, vale

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq 2\pi r M\,.$$

Il membro destro tende a zero per $r \to 0$ e ciò prova l'uguaglianza richiesta. ∎

La formula (3.1) si chiama FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY e, ripetiamo, non ha analogo per generiche funzioni di due variabili reali.

La formula integrale di Cauchy ha una conseguenza interessante: supponiamo che $f(z)$ sia olomorfa in $|z| < 1$ e continua in $|z| \leq 1$. Supponiamo inoltre che $f(e^{it}) = 0$ per ogni t. In tal caso, la funzione $f(z)$ è identicamente zero.

Infatti, per ogni z_0 di modulo minore di 1 vale

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Questa formula vale per ogni r con $|z_0| < r < 1$. Scrivendo esplicitamente la parametrizzazione della circonferenza, si trova

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z_0} ire^{it}\,\mathrm{d}t\,.$$

Passando al limite per r tendente ad 1 si vede che

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it}-z_0} e^{it}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

E' importante sapere che in realtà la sola condizione $f(e^{it}) = 0$ per $t \in [\alpha, \beta] \subseteq [0, 2\pi]$ con $\alpha < \beta$ implica che $f(z)$ è identicamente zero.

3.1.1 La formula della media

Scriviamo la formula integrale di Cauchy nel caso speciale in cui γ è una circonferenza di raggio r centrata in z_0. La formula integrale di Cauchy è

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Introducendo la parametrizzazione

$$\zeta(t) = re^{it} + z_0 = r[\cos t + i \sin t] + z_0\,, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

si trova

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, \mathrm{d}t\,. \tag{3.2}$$

Questa formula mostra che $f(z_0)$ può interpretarsi come *media aritmetica* dei valori che la funzione prende sulla circonferenza di centro z_0 e raggio 1. Per questa ragione il caso particolare (3.2) della formula integrale di Cauchy si chiama FORMULA DELLA MEDIA.

Osserviamo ora che l'integrale che figura nella formula della media è su un intervallo dell'asse reale; e quindi, scrivendo

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

e prendendo la parte reale e la parte immaginaria dei due membri, si trovano le uguaglianze

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r \sin t)\, \mathrm{d}t \\ v(x_0, y_0) &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} v(x_0 + r\cos t, y_0 + r \sin t)\, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.3}$$

ossia *la proprietà della media vale anche per le parti reali e le parti immaginarie di funzioni olomorfe.*

3.1.2 Funzioni rappresentate mediante integrali: funzioni olomorfe e funzioni di classe C^∞

Abbiamo visto che le serie di potenze identificano una classe di funzioni olomorfe. L'integrale che figura nella formula di Cauchy suggerisce una seconda classe di funzioni olomorfe, dotate di una rappresentazione semplice. Sia $h(\zeta)$ una funzione continua sul sostegno di γ (non necessariamente chiusa).

Sia $f(z)$ definita da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta\,. \tag{3.4}$$

In questo modo, $f(z)$ è ben definita per ogni z che non appartiene al sostegno di γ. Inoltre, la funzione

$$z \to \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}$$

è di classe C^∞ ed ha derivate rispetto a z limitate uniformemente al variare di ζ su γ e di z in un intorno di un punto z_0 che *non interseca* γ. Dunque è lecito scambiare il segno di derivata e quello di integrale, ottenendo che

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta \, . \tag{3.5}$$

La funzione $f'(z)$ è continua e ciò mostra che $f(z)$ è olomorfa. Abbiamo così un'ulteriore classe di funzioni olomorfe, dotate di una rappresentazione semplice.

La funzione $f'(z)$ in (3.5) può nuovamente derivarsi e la sua derivata è nuovamente continua, ossia *anche $f'(z)$ è olomorfa.* Questo argomento si può ripetere e dunque si ha:

Teorema 58 *Sia $h(z)$ continua sul sostegno di γ. La funzione (3.4) è olomorfa sul complementare del sostegno di γ e le sue derivate di ogni ordine sono a loro volta funzioni olomorfe.*

Le funzioni rappresentate dalla formula (3.4) hanno quindi una proprietà di regolarità assai speciale ed estremamente forte, proprietà che è comune anche alle funzioni olomorfe ottenute sommando serie di potenze, si veda il Teorema **??**. E' facile vedere che questa fortissima proprietà di regolarità vale per *ogni* funzione olomorfa, indipendentemente da come essa sia stata ottenuta:

Teorema 59 *Sia $f(z)$ olomorfa in Ω. Essa ammette derivate di ogni ordine, e tutte le derivate sono olomorfe.*

Dim. Sia $f(z)$ olomorfa su Ω e sia z_0 un punto di Ω. Sia C una circonferenza contenuta in Ω, di centro z_0. La (3.4) vale con $h(\zeta) = f(\zeta)$ e con $\gamma = C$. Dunque $f(z)$ ha la rappresentazione integrale (3.4) in ogni disco contenuto nel suo dominio e quindi ad essa si applica il Teorema 58. ∎

Torniamo ora a considerare la situazione descritta dalla Formula integrale di Cauchy. In questo caso è *a priori* noto che la funzione $f(z)$ è olomorfa anche nei punti di γ e la formula (3.1) mostra, nel caso delle curve semplici, che

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = f(z_0)$$

anche se z_0 è un punto del sostegno di γ. Si potrebbe immaginare che il limite esista anche nel caso di una generica funzione, definita mediante la formula (3.4). In genere ciò non accade e, più ancora, se questo limite esiste esso può essere diverso da $h(z_0)$ perfino se $h(z)$ è continua su $\mathbf{C}$.

Esempio 60 Sia $h(z) = \bar{z}$ e sia γ: $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. L'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\zeta \frac{1}{\zeta}\frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

si calcola immediatamente notando che

$$\frac{1}{\zeta}\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{z}\frac{1}{\zeta - z}\,.$$

Dunque,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\right] + \frac{1}{z}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right]$$
$$\frac{1}{z}\left[-I(\gamma, 0) + I(\gamma, z)\right] = 0$$

per ogni z nella regione interna a γ, ossia nel disco $|z| < 1$. Dunque,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \equiv 0\ :$$

la funzione $f(z)$ è olomorfa in $|z| < 1$ e continua in $|z| \leq 1$, ma i suoi valori su $|z| = 1$ non coincidono con quelli di $h(z) = \bar{z}$. ∎

Nonostante quest'esempio, la formulazione che abbiamo presentato della formula integrale di Cauchy può estendersi lievemente e questo risultato è spesso utile. Noi lo useremo esplicitamente al paragrafo 4.3.2.

Teorema 61 *Sia Ω_γ una regione di Jordan e sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω_γ e continua sulla sua chiusura. Si ha:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \forall z \in \Omega_\gamma\,, \tag{3.6}$$

$$\lim_{z \to z_0}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right] = f(z_0) \qquad \forall z_0 \in \partial\Omega_\gamma\,. \tag{3.7}$$

Dim. La (3.7) segue dalla (3.6) e dalla continuità di $f(z)$ sulla *chiusura* di Ω_γ. Dunque basta provare (3.6).

Traslando Ω_γ, si può supporre $0 \in \Omega_\gamma$.

Grazie al fatto che $\mathrm{cl}\,\Omega_\gamma$ è compatta, si trova ϵ_0 tale che

$$\Omega_\gamma \subseteq \Omega = \{z \mid\ z/\epsilon \in \Omega_\gamma\ \forall \epsilon \in (\epsilon_0, 1)\}\,.$$

Sia $\epsilon \in (\epsilon_0, 1)$ e sia

$$f_\epsilon(z) = f(\epsilon z)\,.$$

La funzione $f_\epsilon(z)$ è olomorfa sulla regione di Jordan

$$\Omega_\epsilon = \{z \mid \ \epsilon z \in \Omega\} \supseteq \Omega\,.$$

Dunque la formula integrale di Cauchy vale per $f_\epsilon(z)$ e γ:

$$f(\epsilon z) = f_\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_\epsilon(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\epsilon z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}z \qquad \forall z \in \Omega_\gamma\,.$$

La (3.6) segue passando al limite per $\epsilon \to 1^-$. ∎

Quindi anche la formula della media può lievemente estendersi:

Corollario 62 *sia $f(z)$ olomorfa del disco di raggio R e centro z_0 e continua nella sua chiusura. Sotto queste ipotesi vale l'uguaglianza (3.2) e quindi valgono anche le uguaglianze (3.3).*

Un esempio a cui questi risultati possono applicarsi è la funzione

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i(\mathrm{Arg}\, z)/2}$$

(il valore principale della radice quadrata) nel disco $|z - 1| < 1$.

3.2 Conseguenze immediate della formula integrale di Cauchy

Come si è detto, le proprietà delle funzioni olomorfe sono conseguenza della formula integrale di Cauchy. Vediamo le principali di queste proprietà.

3.2.1 Analiticità delle funzioni olomorfe

Si è visto al Teorema 59 che una funzione olomorfa ammette derivate di ogni ordine, e queste sono tutte olomorfe. Mostriamo che vale anche di più. Una funzione $f(z)$ definita su una regione Ω si dice ANALITICA su Ω quando è sviluppabile in serie di Taylor (con raggio di convergenza non nullo) di centro z_0 per ogni $z_0 \in \Omega$.

Il teorema 50 si può riformulare come segue:

Teorema 63 *Una funzione analitica su Ω è anche olomorfa.*

Proviamo il viceversa.

Teorema 64 *Se $f(z)$ è olomorfa su Ω, essa è anche analitica su Ω e inoltre, se $z_0 \in \Omega$, vale*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n (z - z_0)^n \,, \qquad f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

ove C è una qualunque circonferenza di centro z_0 e contenuta in Ω. Se $\Omega = \mathbf{C}$ allora il raggio di convergenza è $+\infty$.

Dim. Sia C una circonferenza di centro z_0 e contenuta in Ω. Usando la *formula integrale di Cauchy,* si scriva

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \, \mathrm{d}\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right]^{-1} \mathrm{d}\zeta \,.$$

Dato che ζ è sulla circonferenza mentre z è nel disco, $|(z - z_0)/(\zeta - z_0)| < 1$ e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right]^{-1} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \mathrm{d}\zeta$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \,.$$

Questa è la formula che volevamo provare.

Si noti che lo scambio della serie con l'integrale è lecito perché per z e z_0 fissati la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

converge uniformemente su C. ∎

In particolare si trova una nuova dimostrazione del Teorema 59:

Teorema 65 *Se $f(z)$ è olomorfa su Ω, essa è ivi di classe C^∞ e per le successive derivate vale la formula di rappresentazione seguente:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, dz$$

ove C è una circonferenza di centro z_0 contenuta in Ω.

Inoltre, ogni derivata di $f(z)$ è a sua volta una funzione olomorfa.

Osservazione 66 Notiamo ora che, a rigore, l'uguaglianza

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n$$

ha senso solo se $z \in \Omega$; ma niente vieta che il disco di convergenza della serie fuoriesca da Ω. In tal caso la serie fornisce un'estensione analitica della funzione $f(z)$. ∎

3.2.2 Funzioni armoniche

Una funzione $u(x, y)$ *a valori reali* delle due variabili reali x ed y si dice ARMONICA su una regione Ω se è ivi di classe C^2 e se per ogni $(x, y) \in \Omega$ vale

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \,.$$

Sia $f(z) = f(x + iy)$ olomorfa su Ω. Si è visto che essa ammette derivate di ogni ordine e quindi anche la sua parte reale $u(x, y)$ è di classe C^∞. Inoltre, la sua derivata $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$ è olomorfa e quindi verifica le condizioni di Cauchy–Riemann, che ora si scrivono:

$$(u_x)_x = (v_x)_y \,, \qquad (v_x)_x = -(u_x)_y \,.$$

La derivata $f'(z)$ può anche rappresentarsi come $f'(z) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$ e scrivendo le condizioni di Cauchy–Riemann si trova

$$(v_y)_x = -(u_y)_y \,, \qquad (u_y)_x = (v_y)_y \,.$$

Confrontando queste uguaglianze si vede che

$$\Delta u = 0 \,, \qquad \Delta v = 0$$

ossia,

Teorema 67 *Le parti reali ed immaginarie di funzioni olomorfe sono funzioni di classe C^∞ che sono anche armoniche.*

Viceversa notiamo:

Teorema 68 *Sia Ω una regione di Jordan di $\mathbf{R}^2$ oppure sia $\Omega = \mathbf{R}^2$. e sia $u(x, y)$ armonica su Ω e di classe C^1. Si ha:*

- *Esiste una funzione $v(x,y)$ armonica su Ω e tale che $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ è olomorfa su Ω. Dunque, ogni funzione armonica di classe C^1 è anche di classe C^∞.*
- *se Ω è una regione di Jordan e se u è continua su $\operatorname{cl}\Omega$ anche $f(x+iy)$ è continua su $\operatorname{cl}\Omega$.*

Dim. Se $v(x,y)$ esiste, allora $v(x,y)$ deve verificare

$$v_x = -u_y\,, \qquad v_y = u_x\,. \tag{3.8}$$

Ossia, v deve essere un potenziale del campo vettoriale $-u_y\mathbf{i} + u_x\mathbf{j}$. Un potenziale v esiste perché, essendo $u \in C^2$ il campo vettoriale è di classe C^1 sulla regione di Jordan Ω (oppure su $\mathbf{R}^2$) ed è irrotazionale perché u è armonica.

Se u è continua su $\operatorname{cl}\Omega$ anche v e quindi anche f sono continue su $\operatorname{cl}\Omega$. ∎

Si chiamano FUNZIONI ARMONICHE CONIUGATE di $u(x,y)$ le funzioni $v(x,y)$ con la proprietà detta sopra.

Questo teorema può sempre applicarsi "localmente" ossia in un intorno di ciascun punto di Ω. Di conseguenza:

Corollario 69 *Le funzioni armoniche su Ω sono di classe $C^\infty(\Omega)$.*

Un ulteriore conseguenza del Teorema 68, del teorema della media è e delle loro estensioni, Teorema 61 e Corollario 62, è:

Teorema 70 (TEOREMA DELLA MEDIA**)** *Sia $u(x,y)$ armonica in un disco D di centro (x_0,y_0) e raggio r e continua sulla sua chiusura. Vale la proprietà della media:*

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,dt\,. \quad ∎$$

3.2.3 Il principio di permanenza

Le serie di potenze hanno una proprietà importante:

Teorema 71 *Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza non nullo e non identicamente nulla. Il punto z_0 non è punto di accumulazione di zeri di $f(z)$.*

Dim. L'assero è ovvio se $a_0 \neq 0$ perché in tal caso $f(z_0) = a_0 \neq 0$. Sia quindi $a_0 = 0$ e sia a_k il primo coefficiente non nullo. Si può scrivere

$$f(z) = (z-z_0)^k\phi(z)\,, \qquad \phi(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-k}\,.$$

Si ha $\phi(z_0) = a_k \neq 0$ e $\phi(z)$ è continua. Dunque, in un intorno di z_0 non si annulla. In tale intorno il primo fattore $(z - z_0)$ ha l'unico zero z_0. Dunque, z_0 non è punto di accumulazione di zeri. ∎

Ricordando che le funzioni olomorfe sono analitiche, il teorema precedente può riformularsi come segue:

Corollario 72 *Una funzione olomorfa su Ω che ha una successione (z_n) di zeri convergente a $z_0 \in \Omega$ è identicamente nulla in un intorno di z_0.*

In realtà vale di più:

Teorema 73 *Sia $f(z)$ olomorfa sulla regione Ω e sia (z_n) una successione di zeri di $f(z)$, convergente ad un punto $z_0 \in \Omega$. Allora, $f(z)$ è identicamente nulla su Ω.*

Dim. Ricordiamo che una regione è un aperto *connesso.*

Per il Corollario 72, esiste un intorno V di z_0 su cui $f(z)$ è nulla. Su quest'intorno, ogni derivata di $f(z)$ è nulla.

Indichiamo con Z l'insieme

$$Z = \{z \in \Omega \mid \frac{\partial^i}{\partial z^i} f(z) = 0 \quad \forall i\} .$$

L'insieme Z contiene V e quindi non è vuoto. Inoltre è chiuso perché ciascuna delle derivate parziali di $f(z)$ è una funzione continua.

Mostriamo che Z è aperto, così che avremo $Z = \Omega$. Sia per questo $\tilde{z} \in Z$. Mostriamo che tutto un intorno di $\tilde{z}$ è contenuto in Z. Per questo, sviluppiamo $f(z)$ in serie di Taylor di centro $\tilde{z}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\tilde{z})(z - \tilde{z})^n .$$

L'uguaglianza vale in un intorno W di $\tilde{z}$.

Dato che $\tilde{z} \in Z$, tutti i coefficienti della serie sono nulli e quindi $f(z) = 0$ su W. Ciò mostra che $W \subseteq Z$ e completa la dimostrazione. ∎

Notiamo che il teorema precedente non vieta che una successione di zeri di una funzione olomorfa non nulla $f(z)$ possa avere punti di accumulazione. In tal caso però tali punti *non sono interni* alla regione su cui $f(z)$ è olomorfa.

Il Teorema 73 ha conseguenze importanti.

Teorema 74 (Principio di permanenza**)** *Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni olomorfe sulla stessa regione Ω e supponiamo che $f(z) = g(z)$ su un insieme dotato di punti di accumulazione* appartenenti ad Ω. *Il tal caso, $f(z) = g(z)$ su Ω.*

Dim. Perchè, per il Teorema 73, $f(z) - g(z)$ è identicamente nulla. ∎

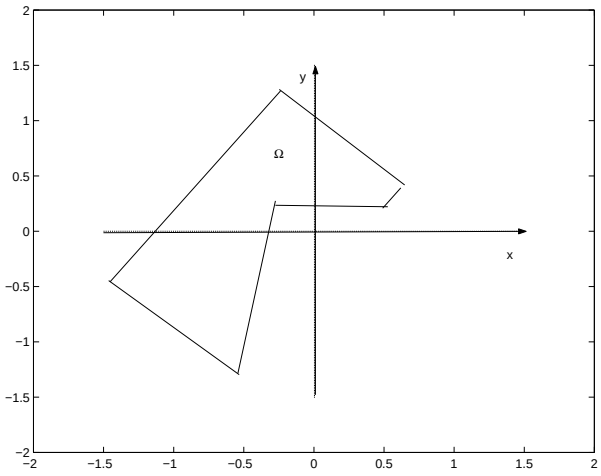
Il teorema precedente vale se, per esempio, $f(z)$ e $g(z)$ sono uguali sul sostegno di una curva in Ω. Per esempio, se $z = x + i0$, allora vale

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

e le funzioni a destra e a sinistra dell'uguaglianza sono olomorfe su $\mathbf{C}$. Dunque l'eguaglianza vale per ogni z in $\mathbf{C}$.

Esempio 75 Torniamo ad esaminare la primitiva di $1/z$, in una regione di Jordan Ω come in figura.

Figura 3.1:



La primitiva che si è indicata con $L(z)$ al paragrafo 2.2.4 coincide con Log$z$ nel primo/secondo quadrante, e quindi ivi verifica

$$e^{L(z)} = z\,.$$

Per il Principio di permanenza, tale uguaglianza vale ovunque $L(z)$ è definita e quindi anche nel terzo quadrante. Dunque, nei punti del terzo quadrante essa è uguale a

$$\log|z| + i[\mathrm{Argz} + 2k\pi]$$

per un valore di k che certamente non è 0, perché Log$z$ è discontinuo quando z traversa l'asse reale negativo, mentre $L(z)$ è continua. Dunque $L(z)$ passa "in modo regolare" dai valori di una determinazione del logaritmo a quelli di un'altra. ∎

L'applicazione del teorema 74 richiede una certa cautela. Supponiamo che $f(z)$ e $g(z)$ siano olomorfe su due regioni Ω_1 ed Ω_2 tra loro diverse, ma con intersezione non vuota e supponiamo che $f(z)$ e $g(z)$ siano uguali sul sostegno di una curva contenuta in $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Il Teorema precedente *NON* implica che le due funzioni debbano essere uguali su $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Implica che debbano essere uguali soltanto sulla *componente connessa* di $\Omega_1 \cap \Omega_2$ che contiene il sostegno della curva. E' importante notare questo nella dimostrazione del teorema seguente che permette di chiarire una stranezza delle funzioni di variabile reale. Per illustrarla, consideriamo la serie di Taylor

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} .$$

Questa serie ha raggio di convergenza 1 e si capisce che il raggio non possa superare 1 perché per $x = -1$ la funzione non è definita.

Consideriamo invece la serie di Taylor

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} .$$

Anche questa serie ha raggio di convergenza 1 nonostante che la funzione somma abbia estensione di classe C^∞ su $\mathbf{R}$ e, guardando le cose soltanto sulla retta reale, non si capisce perché il raggio di convergenza non possa superare 1. Ciò si capisce esaminando la funzione $1/(1+z^2)$ sul piano complesso: essa non è definita per $x = \pm i$. Quest'osservazione ha una validità generale. Infatti, il teorema seguente mostra che la convergenza di una serie di Taylor sul piano complesso trova solamente ostacoli nelle singolarità della funzione.

Per chiarire meglio questo punto, chiamiamo PUNTO REGOLARE per la funzione $f(z)$ un punto z_0 interno alla regione Ω su cui $f(z)$ è olomorfa; diciamo che z_0 è una SINGOLARITÀ ELIMINABILE (o RIMOVIBILE) se z_0 appartiene alla chiusura di Ω e se $f(z)$ ammette estensione olomorfa ad un intorno di z_0 (il punto z_0 stesso incluso). Ogni altro punto della frontiera di Ω si dirà PUNTO SINGOLARE di $f(z)$.

Si noti che un punto z_0 che è una singolarità eleminabile per $f(z)$ è un punto regolare per l'estensione olomorfa di $f(z)$. Per questo non useremo il termine "singolarità" (senza aggettivo) per indicare le singolarità eliminabili.

Teorema 76 *Sia* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n (z - z_0)^n$ *una serie di Taylor con raggio di convergenza* R *con* $0 < R < +\infty$. *Esiste un punto singolare* $\tilde{z}$ *tale che* $|\tilde{z} - z_0| = R$.

Dim. La dimostrazione si fa per assurdo. Sia D il disco di convergenza e sia C la sua circonferenza. Sia w un punto di C. Se w non è singolare, si trova un disco D_w di centro w e una funzione $g(z)$ tale che $g(z)$ è olomorfa in D_w e coincide con $f(z)$ in $D \cap D_w$. Se nessun punto della frontiera di D è singolare, si costruisce in questo modo una copertura della circonferenza C, che è compatta. Dunque, per il *Teorema di Heine-Borel,* si trova un numero finito di dischi $D_1 = D_{w_1}$, $D_2 = D_{w_2}, \ldots, D_n = D_{w_n}$ che coprono C. Ordiniamoli in modo che i loro centri si susseguano per esempio in verso antiorario.

Sia $g_i(z)$ la funzione che abbiamo definita sul disco D_i.

Due dischi consecutivi D_i e D_{i+1} hanno una parte comune su cui sono definite sia g_i che g_{i+1}. Queste due funzioni coincidono ambedue con $f(z)$ in $(D_i \cap D_j) \cap D$ e quindi coincidono ovunqe su $D_i \cap D_j$ perchè esso è un insieme connesso.

Notiamo ora che $\Omega = D \cup (\cup D_i)$ contiene un disco concentrico a D_1 ma di raggio $R_1 > R$ e su Ω è definita la funzione olomorfa

$$\phi(z) = \begin{cases} f(z) & \text{su } D \\ g_i(z) & \text{su } D_i. \end{cases}$$

Come abbiamo visto, la funzione $\phi(z)$ è olomorfa su Ω.

Sviluppiamo questa funzione in serie di potenze di centro z_0. Ovviamente, si ritrova la stessa serie di potenze di $f(z)$. Per il Teorema 64, il raggio di convergenza della serie così ottenuta è almeno uguale ad R_1, *strettamente maggiore* di R e ciò non può darsi. Dunque, almeno uno dei punti di C è singolare per $f(z)$. ∎

3.3 Il teorema di Morera e il principio di riflessione di Schwarz

Il Teorema di Morera inverte il teorema di Cauchy.

Teorema 77 (di Morera) *Sia* Ω *una* regione qualsiasi *e supponiamo che* $f(z)$ *sia* continua *su* Ω. *Supponiamo che su ogni poligono* P *valga*

$$\int_P f(z)\, dz = 0\,. \tag{3.9}$$

Allora, la funzione $f(z)$ *è olomorfa su* Ω.

Dim. Si sa (dal Teorema 29) che se vale la condizione (3.9) su ogni poligono in Ω allora la funzione $f(z)$ ammette una primitiva $F(z)$, ossia si sa che esiste una funzione olomorfa $F(z)$ definita su Ω e tale che

$$F'(z) = f(z)\,.$$

Si sa che le derivate delle funzioni olomorfe sono esse stesse olomorfe (si veda il Teorema 65) e quindi $f(z)$ è olomorfa. ∎

Il principio di riflessione di Schwarz, la cui dimostrazione usa il Teorema di Morera, permette di estendere funzioni olomorfe, in modo da conservare l'olomorfia, in presenza di opportune proprietà di simmetria. Noi presentiamo la forma più semplice di tale principio.

Se Ω è una regione, poniamo

$$\Omega^* = \{z \mid \bar{z} \in \Omega\}\,.$$

Dunque, Ω^* è ottenuta da Ω mediante riflessione rispetto all'asse reale. In particolare, $\Omega = \Omega^*$ quando Ω è simmetrica rispetto all'asse reale.

Sia $f(z)$ olomorfa su Ω e consideriamo la seguente funzione $g(z)$ definita su Ω^*:

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}\,.$$

Ovviamente, $g(z)$ è continua su Ω^*. Mostriamo che è anche olomorfa, facendo vedere che la sua derivata è funzione continua di z. Ciò si vede come segue: sia $z \in \Omega^*$, così che $\bar{z} \in \Omega$. Si ha[1]:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \lim_{h\to 0} \overline{\left[\frac{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}}\right]} = \overline{f'(\bar{z})}\,,$$

funzione continua di z.

Supponiamo ora che:

- sia $\Omega = \Omega^*$ e che questa regione contenga un segmento dell'asse reale;
- $f(z)$ sia olomorfa su Ω e e che prenda valori reali su $\Omega \cap \{z \mid \mathcal{I}m\, z = 0\}$.

Allora,

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

[1] si osservi che il secondo limite non è la derivata di f rispetto a $\bar{z}$. Esso è il coniugato della derivata di $f(\bar{z})$ rispetto a $\bar{z}$.

è olomorfa e coincide con $f(z)$ sull'asse reale e quindi coincide con $f(z)$ ovunque, si veda il Teorema 74. Dunque, sotto queste condizioni, $f(z)$ gode della seguente proprietà di simmetria:

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z)\,. \tag{3.10}$$

D'altra parte è anche vero che se $f(z)$ è olomorfa su una regione $\Omega = \Omega^*$ che interseca l'asse reale e se vale l'uguaglianza (3.10) allora $f(z)$ prende valori reali sull'asse reale.

Invertiamo queste considerazioni per ottenere un teorema di estensione:

Teorema 78 (Principio di riflessione di Schwarz) *Sia Ω una regione contenuta in $\mathcal{I}m\, z > 0$, la cui chiusura interseca l'asse reale su un segmento e sia $f(z)$ olomorfa su Ω. Supponiamo che $f(z)$ ammetta estensione continua al segmento $I = \{z \in \partial\Omega \quad \mathcal{I}m\, z = 0\}$ e che ivi la funzione $f(z)$ prenda valori reali. In tal caso la funzione*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se} \quad z \in \Omega \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{se} \quad z \in \Omega^* \\ \lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\Omega}} f(z) & \text{se} \quad z \in I \end{cases}$$

è olomorfa.

Dim. Illustriamo l'idea della dimostrazione, senza entrare in tutti i dettagli del calcolo. La funzione $g(z)$ è definita e continua sulla regione

$$\Omega \cup \Omega^* \cup I\,.$$

Per ipotesi $g(z)$ è olomorfa su Ω e si è già notato che è olomorfa su Ω^*. Dobbiamo provare che essa è anche olomorfa nei che appartengono ad I. Per mostrare l'olomorfia, usiamo il *teorema di Morera.* Sia P un qualsiasi poligono nel dominio di $g(z)$. Siano P_ϵ^+, P_ϵ^- i due poligoni in figura,
ottenuti "tagliando" P a distanza ϵ, sopra e sotto l'asse reale. L'integrale di $g(z)$ lungo P_ϵ^+ e lungo P_ϵ^- è nullo.

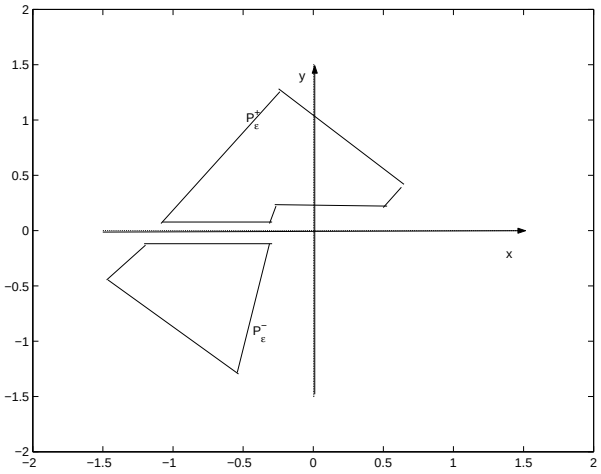
Quando ϵ tende a zero,

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ \int_{P_\epsilon^+} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{P_\epsilon^-} g(z)\,\mathrm{d}z \right\} = \int_P g(z)\,\mathrm{d}z$$

dato che gli integrali sui segmenti paralleli e percorsi in verso opposto tendono ad elidersi.

L'arbitrarietà di P prova che $g(z)$ è olomorfa sul suo dominio. ∎

Figura 3.2:



3.4 Teoremi di Weierstrass e di Montel

I due teoremi di Weierstrass e di Montel riguardano successioni di funzioni.

Teorema 79 (DI WEIERSTRASS**)** *Sia $(f_n(z))$ una successione di funzioni olomorfe sulla medesima regione Ω e supponiamo che $(f_n(z))$ converga ad una funzione $f(z)$ uniformemente sui compatti di Ω. In tal caso, la funzione $f(z)$ è olomorfa e inoltre vale*

$$f'(z) = \lim f_n'(z) \quad \textit{uniformemente sui compatti di } \Omega\,.$$

Dim. Per provare che $f(z)$ è olomorfa basta lavorare localmente, fissando un qualsiasi punto $z_0 \in \Omega$ e mostrando che $f(z)$ è olomorfa in un disco D di centro z_0. In tale disco si usa il *teorema di Morera.* Notiamo prima di tutto che $f(z)$ è continua, come limite uniforme di una successione di funzioni continue. Sia P un poligono in D. La successione $(f_n(z))$ converge ad $f(z)$ uniformemente su P e quindi

$$\int_P f(z)\,\mathrm{d}z = \lim \int_P f_n(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ciascuno degli integrali a destra è nullo perché ciascuna funzione $f_n(z)$ è olomorfa e D è una regione di Jordan. Dunque

$$\int_P f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

per ogni poligono P ed $f(z)$ è olomorfa.

Fissiamo ora un compatto $K \subseteq \Omega$. Vogliamo provare che $(f_n'(z))$ converge uniformemente a $f'(z)$ su K.

Per il Teorema di Heine–Borel, il compatto K è coperto da un numero finito di dischi, ciascuno dei quali è contenuto in Ω e quindi basta provare la convergenza uniforme su ciascuno di tali dischi. Fissiamo l'attenzione su uno di essi, che indichiamo con $\tilde{D}$ e sia D un disco con lo stesso centro di $\tilde{D}$ e raggio maggiore, ancora contenuto in Ω. Sia C la circonferenza di D. Sapendo già che $f(z)$ è olomorfa, per ogni $z \in \tilde{D}$ vale

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta = \lim \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta = \lim f_n'(z) \, .$$

Il limite è uniforme per $z \in \tilde{D}$ perchè $(f_n(z))$ tende ad $f(z)$ uniformemente su $\operatorname{cl} \tilde{D}$ e quindi

$$\int_C \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta$$

tende a zero uniformemente rispetto a $z \in \tilde{D}$. ∎

Osservazione 80 Applicando questo teorema alle serie di potenze ed alle serie di Laurent si trovano dimostrazioni dei teoremi 50 e 52 indipendenti da quelle a suo tempo date. Si noti infatti che la catena di argomenti che conducono al teorema di Weierstrass non fa uso né delle serie di Taylor né delle serie di Laurent. ∎

Il Teorema di Montel è invece un teorema di compattezza. La dimostrazione si basa sul risultato seguente, che è un corollario del Teorema di Ascoli-Arzelà.

Lemma 81 *Sia A un insieme aperto e limitato di $\mathbf{R}^n$ e sia $(g_n\,(x,y))$ una successione di funzioni continue su $K = \operatorname{cl} A$, a valori in $\mathbf{R}^2$. Supponiamo:*

- *la successione $(g_n(x,y))$ è limitata su K, ossia esiste $M \geq 0$ tale che $|g_n(x,y)| < M$ per ogni $(x,y) \in K$;*
- *le funzioni $g_n(x,y)$ sono di classe $C^1(A)$ ed esiste $M \geq 0$ tale che per ogni $(x,y) \in A$ si ha*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} g_n(x,y) \right| < M \, , \qquad \left| \frac{\partial}{\partial y} g_n(x,y) \right| < M \qquad \forall (x,y) \in A \, .$$

Sotto queste condizioni la successione $(g_n(x,y))$ ammette una s.successione uniformemente convergente su K (e quindi la funzione limite è continua).

Questo lemma relativo a funzioni di variabile reale si applica facilmente a successioni di funzioni di variabile complessa. Se $(f_n(z))$ è una successione di funzioni olomorfe su Ω, a ciascuna di esse si associa $g_n(x,y) = (u_n(x,y), v_n(x,y))$ ove $u_n(x,y) + iv_n(x,y) = f_n(x+iy)$. Se $(f_n(z))$ è limitata come funzione da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ allora $(g_n(x,y))$ è limitata come funzione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$; e se $(f_n'(z))$ è limitata, le successioni delle derivate parziali di $(g_n(x,y))$ sono limitate. Dunque:

Corollario 82 *Sia $(f_n(z))$ una succesione di funzioni olomorfe su Ω e sia $K \subseteq \Omega$ compatto. Se sia $(f_n(z))$ che $(f_n'(z))$ sono limitate su K esiste una sottosuccessione $(f_{n_r}(z))$ della $(f_n(z))$ che converge uniformemente su K.*

Usando questocorollario possiamo provare:

Teorema 83 (DI MONTEL) *Sia $(f_n(z))$ una successione limitata di funzioni olomorfe sulla regione Ω. Essa ammette una s.successione che è convergente uniformemente sui compatti di Ω.*

Dim. Si sa dai corsi di topologia che esiste una successione (K_r) di s.insiemi compatti di Ω tali che

$$K_r \subseteq \operatorname{int} K_{r+1}\,, \qquad \cup K_r = \Omega\,.$$

La successione cercata si costruisce mediante il *procedimento diagonale di Cantor* come segue: si applica Corollario 82 a $(f_n(z))$ e K_1 e si costruisce una s.successione $(f_{n_k,1}(z))$ convergente uniformemente su K_1.

I dettagli che mostrano l'applicabilità del corollario si vedranno alla fine della dimostrazione.

Non si conosce il comportamento di questa successione fuori di K_1. Si applica quindi di nuovo il corollario a $(f_{n_k,1}(z))$ e K_2, costruendo la successione $(f_{n_k,2}(z))$ uniformemente convergente su K_2. La $(f_{n_k,2}(z))$ è s.successione di $(f_{n_k,1}(z))$ e quindi converge anche su K_1.

Si itera il procedimento: su K_r si costruisce una sottosuccessione $(f_{n_k,r}(z))$ della $(f_{n_k,r-1}(z))$ che converge uniformemente su K_r.

Il procedimento descritto è riassunto dalla tabella seguente:

$f_{n_1,1}(z)$	$f_{n_2,1}(z)$	$f_{n_3,1}(z)$	$f_{n_4,1}(z)$	$\dots$
$f_{n_1,2}(z)$	$f_{n_2,2}(z)$	$f_{n_3,2}(z)$	$f_{n_4,2}(z)$	$\dots$
$f_{n_1,3}(z)$	$f_{n_2,3}(z)$	$f_{n_3,3}(z)$	$f_{n_4,3}(z)$	$\dots$
$\vdots$				

In questa tavola:

- alla prima riga c'è una s.successione della $(f_n(z))$ e ciascuna riga riporta una s.successione di quella che figura alla riga precedente.
- dunque la "successione diagonale" $(f_{n_r,r})$ è s.successione di ciascuna (f_n).
- La successione che figura alla riga i–ma converge uniformemente su K_i e quindi anche su K_j, con $j < i$.
- la successione diagonale è s.successione di ciascuna $(f_{n_k,j})$ (per ciascun j), alterata nei soli primi elementi. E quindi essa converge su ciascun insieme K_j.

In conclusione, la s.successione diagonale, ossia quella delle funzioni $(f_{n_k,k}(z))$, *converge uniformemente su ogni* K_r *e quindi su ogni compatto contenuto in* Ω.

Per concludere la dimostrazione, mostriamo come applicare il Corollario 82 per estrarre dalla $(f_n(z))$ una s.successione convergente su K_1.

Per ipotesi, su K la successione $(f_n(z))$ è limitata, $|f_n(z)| < M_K$. Se si prova che anche la successione $(f_n'(z))$ è limitata allora la $f_n(z)$ è sia equilimitata che equicontinua e la s.successione cercata esiste per il teorema di Ascoli-Arzelà.

La limitatezza di $\{f_n'(z)\}$ si vede come segue. Sia P un poligono in Ω che racchiude K. Per ogni $z \in K$ vale

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_P \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta \le \left\{\frac{L_P \max_P |f_n(z)|}{2\pi}\right\} \cdot \max_{\zeta\in P, z\in K} \frac{1}{|\zeta - z|^2} < \tilde{M}\,.$$

In conclusione, la restrizione a K_1 di $(f_n(z))$ ha le proprietà richieste dal Corollario 82 e il medesimo argomento può applicarsi alla restrizione di $(f_{n_k,r-1}(z))$ a K_r per ogni r. ∎

3.5 Il principio del massimo modulo ed il teorema di Liouville

Abbiamo visto che le funzioni olomorfe soddisfano al *Teorema della media,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,\mathrm{d}t$$

da cui segue

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\big(\max_{|z-z_0|=r} |f(z)|\big)\ :$$

Il massimo del modulo di $f(z)$ su una circonferenza di centro z_0 è almeno uguale al numero $|f(z_0)|$. In realtà può provarsi di più:

Teorema 84 (Principio del massimo modulo) *Sia $f(z)$ olomorfa su una regione Ω. Se la funzione $|f(z)|$ ammette un punto di massimo relativo z_0 che appartiene ad Ω, allora la funzione $f(z)$ è costante su Ω.*

Dim. Supponiamo che $z_0 \in \Omega$ sia punto di massimo per $|f(z)|$. Proviamo che $|f(z)| \equiv |f(z_0)|$ in un disco D di centro z_0. Se ciò accade, il Lemma 27 implica che $f(z)$ è costante su D e quindi anche su Ω, per il *principio di permanenza.*

Procediamo per assurdo. Sia $z_0 \in \Omega$ un punto di massimo per $|f(z)|$ ma supponiamo che $f(z)$ non sia costante in nessun intorno di z_0. In tal caso, in ogni disco di centro z_0 esiste z tale che

$$|f(z)| < |f(z_0)| \,.$$

Fissiamo l'attenzione su un disco D di centro z_0 e raggio minore di $(1/2)\mathrm{dist}\,(z_0, \partial\Omega)$ e sia $z_1 \in D$ tale che $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. La circonferenza γ frontiera del disco D è parametrizzata da

$$z_0 + |z_0 - z_1| e^{it} \,, \qquad 0 \le t \le 2\pi \,.$$

Il punto z_1 appartiene a questa circonferenza e quindi, per la continuità di $|f(z)|$, esiste $\epsilon > 0$ ed esiste un arco della circonferenza su cui

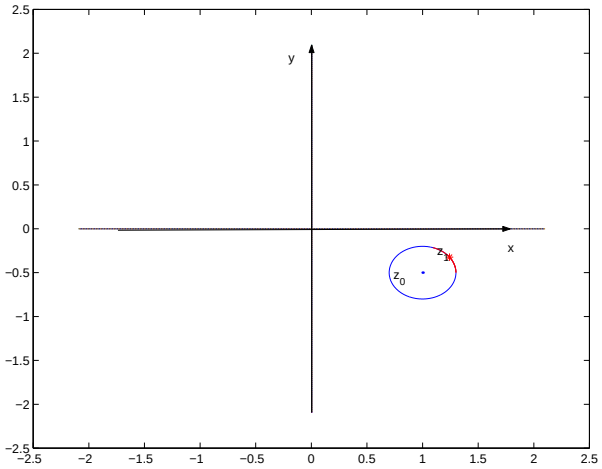
$$|f(z_0 + re^{it})| < |f(z_0)| - \epsilon \,, \qquad \phi_0 < t < \phi_1 \,.$$

Usiamo ora la formula della media come segue:

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, \mathrm{d}t \right| \\
&\le \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_0}^{\phi_1} f(z_0 + re^{it})\, \mathrm{d}t \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{t \notin [\phi_0, \phi_1]} f(z_0 + re^{it})\, \mathrm{d}t \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \Big\{ [\phi_1 - \phi_0][|f(z_0)| - \epsilon] + [2\pi - (\phi_1 - \phi_0)]|f(z_0)| \Big\} \\
&\le |f(z_0)| - \epsilon \frac{\phi_1 - \phi_0}{2\pi} < |f(z_0)|
\end{aligned}$$

e, ricordiamo, $\epsilon > 0$. Ciò non può darsi e dunque $f(z)$ ha *modulo* costante in un intorno di z_0, e quindi è essa stessa costante su Ω. ∎

Figura 3.3:



Si noti che l'asserto analogo per il *minimo non vale.* Infatti, il modulo della funzione *non costante* $f(z) = z$ ha minimo per $z = 0$. Però, applicando il principio del massimo modulo alla funzione $g(z) = 1/f(z)$ si vede immediatamente

Corollario 85 *Sia $f(z)$ olomorfa non costante e* priva di zeri *in Ω. Allora, $|f(z)|$ non raggiunge minimo in Ω.*

Una conseguenza interessante di questi risultati è la seguente:

Teorema 86 *Supponiamo che una curva di livello per $|f(z)|$ sia una curva semplice e chiusa. Allora $f(z)$, se non è costante, ammette almeno uno zero nella regione interna a γ.*

Dim. Sia γ la curva di livello, ossia valga

$$|f(z)| \equiv c \quad \text{sul sostegno di } \gamma\,.$$

Dal principio del massimo, nei punti della regione interna vale

$$|f(z)| \leq c\,. \tag{3.11}$$

Se $c = 0$ allora $f(z)$ stessa è nulla e quindi costante. Sia quindi $c > 0$. Se la funzione non si annulla nella regione interna a γ, anche il minimo del modulo viene assunto so γ, ossia nella regione interna vale

$$c \leq |f(z)|\,. \tag{3.12}$$

Dunque, nella regione interna a γ valgono sia la (3.11) che la (3.12):

$$c \leq |f(z)| \leq c$$

ossia $|f(z)|$ è costante, uguale a c, e quindi $f(z)$ stessa è costante, per il Lemma 27. ∎

Il principio del massimo si trasferisce dalle funzioni olomorfe alle loro parti reali e immaginarie, ossia alle funzioni armoniche, come segue:

Teorema 87 *Sia $u(x,y)$ armonica non costante su Ω. Allora, $u(x,y)$ non raggiunge né massimo né minimo su Ω.*

Dim. Si sa, dal Teorema 68, che esiste una funzione armonica coniugata $v(x,y)$ di $u(x,y)$. Consideriamo la funzione olomorfa $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Applichiamo il *principio del massimo modulo* alla funzione olomorfa e mai nulla

$$g(z) = e^{f(z)}\,.$$

Si sa che $|g(z)|$ non ammette né punti di massimo né punti di minimo e

$$|g(x+iy)| = e^{u(x,y)}\,.$$

L'asserto segue per la monotonia dell'esponenziale su $\mathbf{R}$. ∎

Osservazione 88 Si noti che:

- l'asserto relativo alle funzioni armoniche si riferisce al massimo e minimo *della funzione,* e non del suo modulo.
- il principio del minimo vale per ogni funzione armonica, anche se questa si annulla.

Supponiamo ora che una funzione $f(z)$ sia olomorfa su $\mathbf{C}$. Una tale funzione si dice INTERA. Ovviamente il principio del massimo modulo vale anche per le funzioni intere, ma in tal caso può dirsi di più:

Teorema 89 (TEOREMA DI LIOUVILLE) *Una funzione intera e limitata è costante.*

Dim. Una funzione intera ammette sviluppo di Taylor, per esempio di centro 0, e raggio di convergenza $+\infty$ (si veda il Teorema 64),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n\,, \qquad \forall z \in \mathbf{C}\,.$$

Si sa che

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta$$

con C_R circonferenza di centro l'origine e raggio R. Dunque su C_R vale $|\zeta|^{n+1} = R^{n+1}$. Di conseguenza, se $|f(z)| < M$ per ogni z, vale

$$|f_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{M}{R^n} \, .$$

Questa diseguaglianza vale per ogni R e quindi

$$|f_n| \leq \inf_{R>0} \frac{M}{R^n} \, .$$

Se $n > 0$ l'estremo inferiore è nullo e quindi $f_n = 0$ per ogni $n > 0$. Ossia si ha $f(z) = f_0$, costante. ∎

Il teorema di Liouville è un teorema assai potente. Per esempio vedremo più avanti (al Teorema 123) come dedurne la conseguenza seguente:

Corollario 90 *Sia $f(z)$ una funzione intera. Supponiamo che $f(z)$ non prenda valori su un segmento. Allora, $f(z)$ è costante.*

Ora invece usiamolo per provare:

Teorema 91 (Teorema fondamentale dell'algebra**)** *Sia $p(z)$ un polinomio. Se il suo grado è positivo esso ammette zeri.*

Dim. Se $p(z)$ ha grado almeno 1 allora

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{p(z)} = 0 \, . \tag{3.13}$$

Se $p(z)$ non si annulla, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

è intera e, per (3.13), limitata. Dunque costante. Il suo limite essendo nullo, anche la funzione è identicamente zero. Ciò contrasta con la definizione di $f(z)$, perché $f(z)p(z) = 1$. Dunque $p(z)$, se ha grado almeno 1, deve annullarsi. ∎

Concludiamo notando che anche il teorema di Liouville si estende alle funzioni armoniche su $\mathbf{R}^2$, applicandolo alla funzione olomorfa

$$g(x + iy) = e^{u(x,y)+iv(x,y)}$$

ove $v(x,y)$ è una delle funzioni armoniche coniugate di $u(x,y)$. Si noti, dal Teorema 68, che $v(x,y)$ è armonica su $\mathbf{R}^2$ come $u(x,y)$. Se la funzione armonica $u(x,y)$ è definita per ogni (x,y) e limitata, la funzione $g(z)$ è intera e limitata e quindi costante; e quindi anche $u(x,y)$ è costante:

Teorema 92 *Una funzione $u(x,y)$ armonica su $\mathbf{R}^2$ e limitata è costante.*

3.6 Le singolarità isolate

Nella sezione 3.2.1 abbiamo definito i punti singolari di una funzione olomorfa. Niente vieta che l'insieme dei punti singolari abbia punti di accumulazione. Noi vogliamo ora studiare il caso in cui ciò non avviene, caso che può ridursi al seguente: una funzione $f(z)$ è olomorfa in un disco D, escluso il suo centro z_0. In tal caso diremo che z_0 è una SINGOLARITÀ ISOLATA di $f(z)$.

Caratterizziamo prima di tutto le SINGOLARITÀ ELIMINABILI.

Ricordiamo che z_0 è singolarità eliminabile se $f(z)$ ha estensione olomorfa ad un intorno di z_0 (si ricordi che l'intorno di z_0 contiene z_0; ossia si richiede l'esistenza di una estensione derivabile con continuità anche in z_0).

Teorema 93 (DI RIEMANN) *Sia z_0 una singolarità isolata di $f(z)$. Il punto z_0 è singolarità eliminabile se e solo se la funzione $|f(z)|$ è limitata in un suo intorno.*

Dim. Se $f(z)$ ammette estensione olomorfa anche in z_0 allora $|f(z)|$ è limitato in un intorno di z_0. Per provare il viceversa, introduciamo la funzione

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z = z_0 \\ (z-z_0)^2 f(z) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questa funzione è continua in un disco D contenente z_0, incluso il punto z_0 perché $f(z)$ è limitata in un intorno di z_0. *Proveremo* che $h(z)$ è olomorfa. Accettando questo, notiamo che $h(0) = 0$ e che $h'(0) = 0$, perchè $f(z)$ è limitata e quindi $h(z)$ è infinitesima, per $z \to z_0$, di ordine *maggiore* di 1. Dunque $h(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor di centro z_0,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n (z-z_0)^n$$

con $h_0 = 0$ e $h_1 = 0$,

$$h(z) = (z-z_0)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} h_n (z-z_0)^n$$

Per $z \neq z_0$ si trova quindi che

$$f(z) = g(z)\,, \qquad g(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n (z - z_0)^n\,,$$

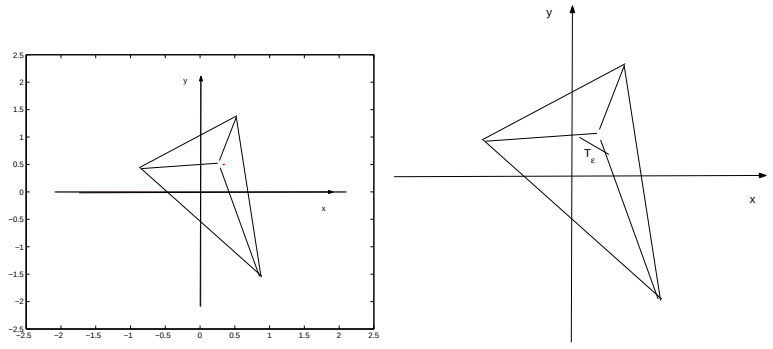
e $g(z)$ è analitica anche in z_0. Dunque, il punto z_0 è una singolarità eliminabile di $f(z)$.

Per completare la dimostrazione dobbiamo mostrare che $h(z)$ è olomorfa[2]. Usiamo il *Teorema di Morera:* sia T un qualsiasi triangolo in D e mostriamo che

$$\int_T h(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Ciò è ovvio se T non racchiude z_0. Altrimenti, decomponiamolo in tre triangoli con un vertice comune in z_0 come nella figura 3.4 a sinistra.

Figura 3.4:



Basta provare che l'integrale è nullo su ciascuno di essi.

Si consideri uno di essi, indentato vicino al vertice z_0, come nella figura 3.4 a destra, mediante un "piccolo" triangolo T_ϵ. Sia ϵ il perimetro di T_ϵ e sia $\mathcal{T}_\epsilon$ il trapezio residuo. L'integrale di $h(z)$ sul trapezio è nullo, e l'integrale sul triangolo T_ϵ è maggiorato da

$$\epsilon \max_{T_\epsilon} ||h(z)||$$

e questo tende a zero per $\epsilon \to 0$. Infatti, essendo $f(z)$ limitata in un intorno di z_0, anche $h(z)$ lo è. Dunque,

$$\int_T h(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{T_\epsilon} h(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{T}_\epsilon} h(z)\,\mathrm{d}z \right\} = 0\,.$$

[2]non è difficile vedere che $h(z)$ è ovunque derivabile, e quindi olomorfa per il Teorema 22. Non avendo però provato questo risultato, non vogliamo usarlo.

Ciò completa la dimostrazione. ∎

In seguito useremo il corollario seguente, di ovvia dimostrazione:

Corollario 94 *Sia $f(z)$ olomorfa su $\Omega \setminus \{z_0\}$ e continua su Ω. La funzione $f(z)$ è olomorfa su Ω.*

Il Teorema 93 mostra in particolare che se z_0 è un punto singolare (non una singolarità eliminabile) di $f(z)$ allora

$$\limsup_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$$

e suggerisce di studiare separatamente i due casi

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty\,,$$

e in tal caso si dice che z_0 è un POLO di $f(z)$, e il caso

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| \text{ non esiste.}$$

In quest'ultimo caso si dice che z_0 è SINGOLARITÀ ESSENZIALE di $f(z)$.

Esaminiamo prima di tutto il caso del polo.

Teorema 95 *Un punto z_0 è un polo per $f(z)$ se e solo se esiste un intorno D di z_0 su cui la funzione $f(z)$ si rappresenta come*

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} f_n (z - z_0)^n\,, \tag{3.14}$$

con k numero positivo.

Dim. E' immediato verificare che se $f(z)$ si rappresenta come richiesto, con k numero positivo, allora $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$. Viceversa, se z_0 è un polo,

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

tende a zero per $z \to z_0$ e quindi in z_0 ha singolarità eliminabile. Si può quindi scrivere, per $z \neq z_0$,

$$g(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} g_n (z - z_0)^n$$

e $k > 0$ perchè $g(z)$ tende a zero per $z \to z_0$.

Mettendo in evidenza $(z - z_0)^k$,

$$g(z) = (z - z_0)^k \phi(z)$$

con $\phi(z_0) \neq 0$ e quindi con $1/\phi(z)$ olomorfa in un intorno di z_0, incluso z_0. Dunque

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{\phi(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n (z - z_0)^n$$

e questa è la rappresentazione richiesta. ∎

Il numero k in (3.14) si chiamaORDINE DEL POLO se $f_{-k} \neq 0$. Si confronti con la nota definizione di ORDINE DI UNO ZERO come quel numero $k > 0$ per cui

$$f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} f_n (z - z_0)^n$$

se $f_k \neq 0$.

Passiamo ora a studiare il caso della singolarità essenziale. Ovviamente in questo caso $f(z)$ ha un comportamento "assai disordinato" quando $z \to z_0$. Il teorema seguente, di dimostrazione assai difficile, mostra che il comportamento è il peggiore che si possa immaginare:

Teorema 96 (PICARD**)** *Sia z_0 una singolarità essenziale di $f(z)$ e sia D un disco di centro z_0. L'immagine di D mediante $f(z)$ è uguale a tutto $\mathbf{C}$, escluso al più un numero.*

Non possiamo provare questo teorema, ma possiamo provarne una versione più semplice:

Teorema 97 (CASORATI-WEIERSTRASS**)** *Sia z_0 singolarità essenziale di $f(z)$ e sia D un disco di centro z_0. L'immagine di D è densa in $\mathbf{C}$.*

Dim. Per assurdo, sia $f(D)$ non denso in $\mathbf{C}$. In tal caso esiste un punto w che non è di accumulazione per $f(D)$. Il punto w può appartenere o meno ad $f(D)$. Procedendo per assurdo, mostriamo che $w \in f(D)$ *non può essere.*

Se $w = f(z_1)$, $z_1 \in D$, allora

$$w = \lim f(z_n)$$

per ogni successione (z_n) tendente a z_1. Ma, w non è di accumulazione per l'insieme dei numeri $\{f(z_n)\}$ e quindi si ha $f(z_n) = w$ per ogni n (escluso un numero finito al più). Dal teorema 74 segue che $f(z)$ è costante e quindi che z_0 è singolarità eliminabile.

Dunque deve essere $w \notin f(D)$ e ricordiamo che w non è punto di accumulazione di $f(D)$. Dunque, esiste $r > 0$ tale che

$$|f(z) - w| > r \qquad \forall z \in D$$

e quindi la funzione olomorfa

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

verifica

$$|g(z)| < \frac{1}{r}\,.$$

Essa ha quindi una singolarità eliminabile in z_0 e quindi

$$g(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{+\infty} g_n (z - z_0)^n\,, \qquad g_0 \neq 0\,,$$

si veda il Teorema 93. Dunque,

$$f(z) = w + \frac{1}{(z - z_0)^k}\phi(z)$$

con $\phi(z)$ olomorfa in D (incluso il punto z_0). Dunque, $f(z)$ ha in z_0 una singolarità eliminabile, se $k = 0$, oppure un polo.

Ciò contrasta con l'ipotesi fatta, che z_0 è singolarità essenziale, e quindi w è punto di accumulazione per l'immagine di $f(z)$.

Abbiamo così provato che se z_0 è singolarità essenziale di $f(z)$ allora $\operatorname{im}\operatorname{cl} f(D) = \mathbf{C}$. ∎

Esempi di funzioni con singolarità essenziali sono forniti in particolare dalle serie di Laurent convergenti in un disco privato del suo centro, come per esempio

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\,.$$

Infatti, sappiamo che sia nel caso del polo che della singolarità eliminabile il corrispondente sviluppo in serie di potenze ha al più un numero finito di potenze negative. Mostreremo che questo caso è del tutto generale:

Teorema 98 *Sia z_0 una singolarità isolata di $f(z)$. Se z_0 è singolarità essenziale di $f(z)$ allora vale*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n (z - z_0)^n$$

e:

1. *si ha* $f_n \neq 0$ *per infiniti valori* negativi *dell'indice* n*;*

2. *la serie converge in un intorno di* z_0*, privato del punto* z_0*.*

Invece di provare direttamente questo teorema, è conveniente dedurlo dallo studio di un caso più generale.

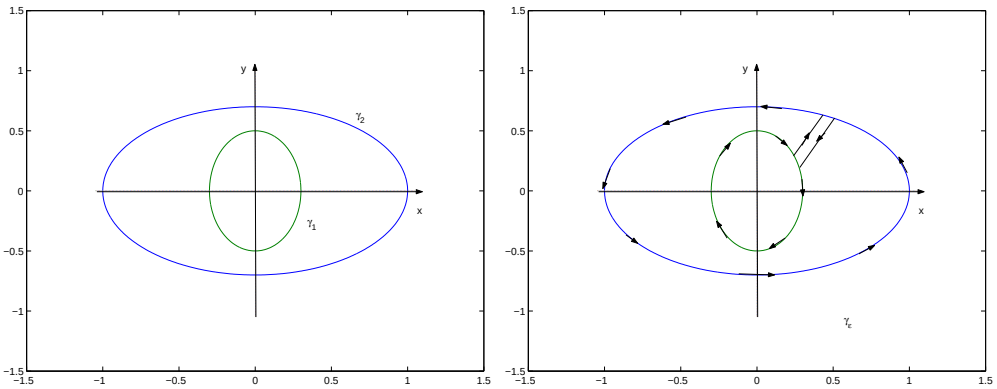
3.6.1 Formula di Laurent

Ricordiamo che la formula integrale di Cauchy è immediata conseguenza del teorema di Cauchy e che questo vale per funzioni olomorfe in regioni di Jordan. Abbiamo però esteso il teorema di Cauchy a regioni di forma $\Omega_{\gamma_1} \setminus \Omega_{\gamma_2}$, delimitate da due curve di Jordan. Si ha in tal caso

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{3.15}$$

se γ_1 e γ_2 sono come nella figura 3.5, a sinistra.

Figura 3.5:



Ricordiamo brevemente la dimostrazione, che poi useremo per estendere la formula integrale di Cauchy. Si considera la curva γ_ϵ della figura 3.5, a destra (per evitare complicazioni supponiamo che γ_1 e γ_2 siano semplici così che anche γ_ϵ si può segliere semplice). Per essa vale

$$\int_{\gamma_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Al limite per ϵ tendente a zero si trova che vale (3.15).

Sia ora z un punto della regione interna a γ_ϵ. Si può scrivere la formula integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

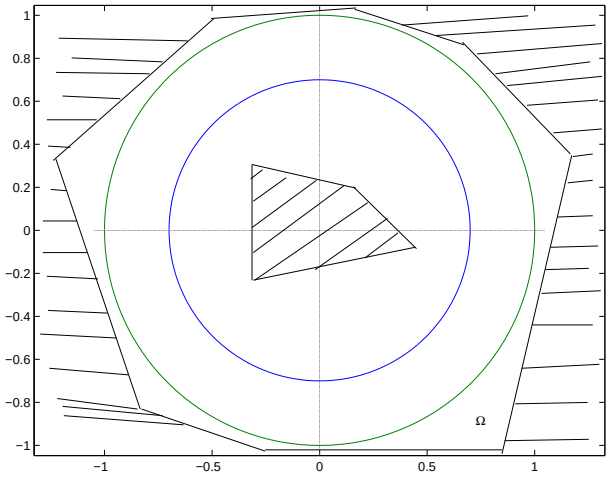
(si ricordi, curva semplice). Al limite per $\epsilon \to 0$ questa uguaglianza si riduce a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \, . \tag{3.16}$$

Osservazione 99 Si noti che abbiamo scritto un segno "−" di fronte al secondo integrale perché per convenzione il simbolo $\int_\gamma$ indica l'integrale sulla curva percorsa in verso *positivo,* mentre il secondo integrale si calcola sulla γ_1 percorsa in verso *negativo.* ∎

Applichiamo la formula (3.16) al caso in cui $f(z)$ è olomorfa in una corona circolare di centro z_0, come in figura 3.6.

Figura 3.6:



In questo caso per γ_1 e γ_2 si scelgono due circonferenze concentriche di centro z_0 e la (3.16) mostra che

$$f(z) = f_2(z) - f_1(z)$$

con

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \, , \qquad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \, .$$

La $f_2(z)$ si sviluppa in serie di Taylor, esattamente come si è già visto al paragrafo 3.2.1:

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \mathrm{d}\zeta$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n\,.$$

Si noti che questo calcolo si giustifica perché

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$$

dato che ζ appartiene a γ_2, la circonferenza il cui disco *contiene* la corona circolare.

Un argomento analogo si applica all'espressione della $f_1(z)$, ma tenendo conto ora del fatto che ζ è sulla circonferenza γ_1 che *lascia fuori* la corona circolare e quindi ora

$$\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1\,.$$

Dunque,

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z_0 - z}\cdot\frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}\,\mathrm{d}\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left(-\frac{1}{z-z_0}\right)\int_{\gamma_1} f(\zeta)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}\zeta$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\,\mathrm{d}\zeta\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,.$$

Ora notiamo che, per la formula (3.15), il valore degli integrali non muta se γ_1 e γ_2 vengono sostituite da una qualunque circonferenza C di centro z_0 e

contenuta nella corona circolare. Tenendo conto di ciò, scriviamo

$$
\begin{aligned}
-f_1(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n \, \mathrm{d}\zeta \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n \, \mathrm{d}\zeta \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C} (\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \right) (z - z_0)^n .
\end{aligned}
$$

Sommando $f_2(z)$ e $-f_1(z)$ si trova infine

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \right) (z - z_0)^n . \tag{3.17}
$$

Questa formula, valida quando $f(z)$ è olomorfa in una corona circolare, si chiama FORMULA DI LAURENT.

Argomenti del tutto analoghi a quelli incontrati nella dimostrazione del Teorema 76 mostrano che la funzione $f(z)$ ha punti singolari sia sulla circonferenza esterna della regione di convergenza che su quella interna. Se la corona di convergenza si riduce ad un disco privato del suo centro z_0 allora il punto z_0 è singolarità isolata (che potrebbe essere rimovibile) e viceversa:

Teorema 100 *Una funzione olomorfa $f(z)$ di cui z_0 è singolarità isolata, ammette una serie di Laurent di centro z_0 il cui raggio di convergenza r vale* 0.

Osservazione 101 Osserviamo che una funzione olomorfa ammette un'unica serie di Taylor di centro un punto z_0. Essa però può ammettere più serie di Laurent convergenti in corone circolari diverse, ma con lo stesso centro. Per esercizio, si calcolino le serie di Laurent della funzione

$$
f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z+2)}
$$

di centro $z_0 = 0$. ∎

Sappiamo già che se la funzione ha in z_0 una singolarità eliminabile, allora la serie è di Taylor, mentre se z_0 è un polo allora la serie di Laurent è troncata da sotto. Dunque:

Teorema 102 *sia z_0 una singolarità isolata della funzione olomorfa $f(z)$. La singolarità isolata z_0 è punto singolare essenziale se e solo se la serie di Laurent di $f(z)$ che converge in un disco di centro z_0* privato del centro *ha infiniti termini di esponente negativo.*

Concludiamo con un'osservazione concernente il coefficiente f_{-1} della serie di Laurent (3.17). Per esso vale

$$f_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta\,.$$

Quindi, se si riesce a sviluppare una funzione in serie di Laurent, allora è immediato il calcolo di tale integrale, e anche di altri integrali ad esso correlati.

Esempio 103 Un primo esempio **tautologico e non significativo** è il seguente. Consideriamo funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}\,,$$

che è già in forma di serie di Laurent di centro $z_0 = 0$. Se C è la circonferenza di raggio 2 e centro 0 si trova:

$$\int_C f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 2\pi i\,. \tag{3.18}$$

Questo esempio è **tautologico** *perchè l'uguaglianza (3.18) è stata esplicitamente usata nella derivazione della formula integrale di Cauchy di cui la formula di Laurent è conseguenza.* Una ovvia traslazione conduce a questo secondo esempio:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1}\,,$$

che è già in forma di serie di Laurent di centro $z_0 = 1$. Se C è la circonferenza di raggio 2 e centro 0 si trova:

$$\int_C f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = -2\pi i\,.$$

Ovviamente, anche questo esempio è poco significativo perchè si tratta semplicemente di una traslazione di $f(z) = 1/z$ seguita dalla moltiplicazione per -1.

Un esempio **semplice ma significativo** è quello della funzione

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}\,.$$

In questo caso si vede che $f_{-1} = 1$ e quindi si ha ancora

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i\,. \quad \blacksquare$$

Sia C una circonferenza di centro z_0, singolarità isolata di $f(z)$. Il numero

$$f_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

si chiama il RESIDUO della funzione $f(z)$ in z_0.

Il residuo di $f(z)$ in z_0 si indica col simbolo

$$\mathrm{Res}(f, z_0)\,.$$

Sia ora $z_0 \in \mathbf{C}$ un polo di $f(z)$. Si sa che si può scrivere

$$f(z) = \sum_{n=-r}^{-1} f_n(z - z_0)^n + \phi(z)$$

con $\phi(z)$ regolare in z_0. La funzione razionale

$$\sum_{n=-r}^{-1} f_n(z - z_0)^n$$

si chiama la PARTE PRINCIPALE di f nel polo z_0.

3.6.2 Singolarità e zeri ad infinito

Nello studio del limite di una funzione olomorfa $f(z)$ per z tendente a $+\infty$ conviene usare una terminologia analoga a quella che si usa per $z \to z_0$. Ciò si fa introducendo la funzione

$$g(z) = f(1/z)$$

e dicendo che $f(z)$ ha ad infinito una singolarità isolata se ciò accade per $g(z)$ in $z_0 = 0$; e parlando di singolarità eliminabile, polo o singolarità essenziale, a seconda del comportamento di $g(z)$ in $z_0 = 0$. La serie di Laurent di $f(z)$ ad infinito si costruisce a partire dalla serie di Laurent di $g(z)$ a 0. Se

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n z_n$$

allora la serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n z^n \,, \qquad f_n = g_{-n} \,, \tag{3.19}$$

si chiama la serie di Laurent di $f(z)$ ad infinito. Dunque, se infinito è una SINGOLARITÀ ESSENZIALE di $f(z)$ allora la sua serie di Laurent ha infiniti termini con esponente *positivo.* Se infinito è un POLO allora la serie (3.19) ha solo un numero finito di termini con esponente positivo. Si ha invece una SINGOLARITÀ ELIMINABILE ad infinito quando $f_n = 0$ per $n > 0$.

Chiameremo RESIDUO AD INFINITO il numero[3]

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}\, \mathrm{d}z = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2} g(z), 0\right) .$$

In questo caso C è una circonferenza di centro 0 e raggio così grande da racchiudere tutte le singolarità "al finito" di $f(z)$. Dunque,

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -f_{-1}.$$

Si noti quindi che *il residuo ad infinito può essere non nullo anche se infinito è una singolarità rimovibile. Ciò accade per es. nel caso della funzione* $f(z) = 1/z$.

[3] come sempre il verso di percorrenza su C è quello positivo, ossia antiorario. Tenendo conto del fatto che la trasformazione $z \mapsto 1/z$ cambia il verso di percorrenza sulla circonferenza si mostri che anche il secondo integrale è preceduto dal segno meno.

Sia ora $z_0 \in \mathbf{C}$ un polo di $f(z)$. Scriviamo

$$f(z) = \sum_{n=-r}^{-1} f_n (z - z_0)^n + \phi(z)$$

e ricordiamo che la funzione razionale

$$\sum_{n=-r}^{-1} f_n (z - z_0)^n$$

si chiama la PARTE PRINCIPALE di f nel polo z_0. Vediamo come si modifica questa definizione nel caso di un polo ad ∞.

Se infinito è un polo, la funzione $f(z)$ è in particolare olomorfa per $|z| > R$ con R sufficientemente grande e quindi, per $|z| > R$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k} f_n z^n + \psi(z)$$

con $\psi(z)$ olomorfa (e nulla) ad infinito. In questo caso, il polinomio

$$\sum_{n=1}^{k} f_n z^n$$

si chiama la PARTE PRINCIPALE AD INFINITO di f.

Sia ora $f(z)$ una funzione che ha solo singolarità polari sia al finito che all'infinito. Allora i poli sono in numero finito N e se $P_m(z)$ è la parte principale dell'm–mo polo,

$$f(z) - \sum_{m=1}^{N} P_m(z)$$

è intera e limitata, ossia, per il Teorema di Liouville, è costante. Si ha dunque:

Teorema 104 *Una funzione analitica le cui singolarità, al finito ed all'infinito, sono poli, è razionale.*

Sia quindi $f(z)$ una funzione razionale e sia R un raggio così grande che la circonferenza C_R di centro 0 e raggio R racchiuda tutti i poli al finito. Consideraimo i due integrali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(z)\, \mathrm{d}z\,, \qquad -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(z)\, \mathrm{d}z\,.$$

L'integrale di sinistra è la somma dei residui nei poli al finito mentre quello di destra è il residuo ad infinito. Dunque:

Teorema 105 *La somma dei residui in tutti i poli (al finito e ad infinito) di una funzione razionale è nulla.*

Se la serie di potenze (3.19) non ha termini con esponente positivo, diremo che la funzione $f(z)$ ha estensione olomorfa ad infinito, in particolare diremo che ha uno zero ad infinito se essa ha solamente termini con esponente negativo. E il primo di essi che è non nullo individua L'ORDINE DELLO ZERO.

3.7 Il metodo dei residui

Sia Ω una regione in cui $f(z)$ è analitica, a parte che nei punti singolari isolati $z_n \in \Omega$, in numero finito o meno. Sia γ una curva semplice e chiusa in Ω, che non incontra punti singolari di $f(z)$. Si noti che γ racchiude al più un numero finito di punti singolari perché questi, essendo isolati, possono accumularsi solamente su punti di $\partial\Omega$.

Una semplice iterazione della formula (3.15) mostra che vale

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum \int_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

ove C_i sono circonferenze centrate nei punti singolari $z_i \in \Omega_\gamma$ di $f(z)$, così piccole da non debordare da Ω_γ e da non intersecarsi l'una con l'altra. La sommatoria è estesa ai punti singolari $z_i \in \Omega_\gamma$. Dunque:

Teorema 106 (dei residui) *Sia γ una curva semplice e chiusa in Ω, che non incontra i punti singolari di $f(z)$. Alora vale*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, z_i)\,,$$

la somma essendo estesa ai soli punti singolari che sono racchiusi da γ.

Questo teorema è particolarmente importante per il calcolo di integrali impropri di funzioni *di variabile reale*. E' opportuna una premessa.

3.7.1 Premessa sugli integrali impropri

Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale definita su $\mathbf{R}$ che, per semplicità, assumiamo continua. Per definizione,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{S\to-\infty} \int_{-S}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{T\to+\infty} \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

L'integrale improprio esiste quando ambedue i limiti esistono finiti.

Si chiama VALORE PRINCIPALE dell'integrale improprio il numero

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

E' ovvio che *se l'integrale improprio esiste allora esiste anche il suo valore principale ed essi coincidono;* ma il valore principale può anche esistere senza che esista l'integrale improprio, come si vede considerando la funzione

$$f(x)=\sin x\,.$$

Essendo la funzione dispari il valore principale è nullo, mentre l'integrale improprio non esiste.

Il metodo dei residui può spesso usarsi per il calcolo del valore principale di un integrale improprio, mentre frequentemente si richiede il valore dell'integrale improprio stesso. Dunque *prima di usare il metodo dei residui per il calcolo di un integrale improprio, è necessario accertarsi che questo esista.*

Un caso in cui nessuna verifica preliminare è richiesta è il caso di una funzione pari,

$$f(x)=f(-x)\,.$$

In tal caso

$$\int_{-T}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

e quindi l'integrale improprio esiste se e solo se esiste il suo valore principale.

3.7.2 Calcolo di integrali impropri

Mostriamo un esempio semplice:

Esempio 107 Sia $f(x)=1/(1+x^2)$. Si sa che questa funzione ammette integrale improprio e che

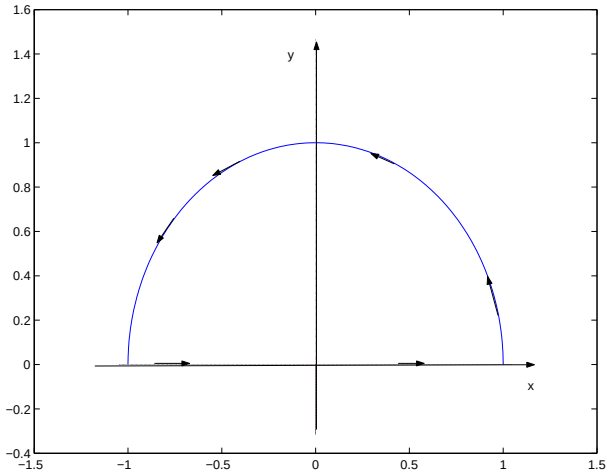
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\pi\,.$$

Mostriamo come si possa ritrovare questo valore usando il metodo dei residui.

La funzione $f(x)$ è la restrizione all'asse reale della funzione

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=-\frac{1}{2}\frac{i}{z-i}+\frac{1}{2}\frac{i}{z+i}$$

Figura 3.7:



e quindi

$$\mathrm{Res}(f,i) = -\frac{i}{2}.$$

Integriamo la funzione $f(z)$ sulla curva in figura 3.7
L'integrale è

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) = \pi\,.$$

Passando la limite per $R \to +\infty$ si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi + \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Il risultato segue da qui se possiamo provare che l'ultimo limite è nullo. ∎

Questo semplice esempio mostra che, per poter usare facilmente il metodo dei residui per il calcolo di integrali impropri, dovremo dare metodi efficienti per il calcolo dei residui; e dovremo dare criteri che assicurano che gli integrali su opportune semicirconferenze tendono a zero quando il raggio tende a $+\infty$. Al secondo problema rispondono i due risultati seguenti:

Lemma 108 (DEL GRANDE CERCHIO) *Sia $f(z)$ analitica su $\mathbf{C}$ salvo che nei punti singolari z_n. Se le singolarità non sono in numero finito si assume*

$$\lim |z_n| = +\infty\,.$$

Siano R_n raggi tali che $R_n \neq |z_k|$ per ogni n e per ogni k,

$$\lim R_n = +\infty\,.$$

Se esistono numeri positivi M *ed* ϵ *per cui*

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\epsilon}} \qquad \text{per} \quad |z| = R_n\,,$$

allora vale

$$\lim \int_{|z|=R_n} f(z)\,dz = 0\,.$$

Dim. La dimostrazione è immediata, notando che

$$\left| \int_{|z|=R_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{1+\epsilon}}$$

e il membro destro tende a zero. ∎

Questo lemma si applica facilmente al caso dell'esempio 107.

Osservazione 109 Si noti:

- se il lemma del grande cerchio si vuol applicare per integrare per esempio su una semicirconferenza nel semipiano superiore, allora basta supporre che le condizioni valgano per $\Re e\, z > -\sigma$ con $\sigma > 0$;
- Nelle ipotesi del lemma 108, la disuguaglianza $|f(z)| < [M/|z|^{1+\epsilon}]$ vale in particolare per ogni $z = x$ reale e quindi nelle ipotesi del Lemma del grande cerchio, l'integrale *improprio di $f(x)$ esiste.* ∎

Il secondo risultato si applica quando si devono calcolare integrali di funzioni della forma

$$f(z)e^{i\omega z}$$

lungo semicirconferenze nel semipiano $\mathcal{I}m\, z > 0$ quando $\omega > 0$, nel semipiano $\mathcal{I}m\, z < 0$ quando $\omega < 0$.

Indicando con Γ_R la semicirconferenza in figura 3.8, si ha

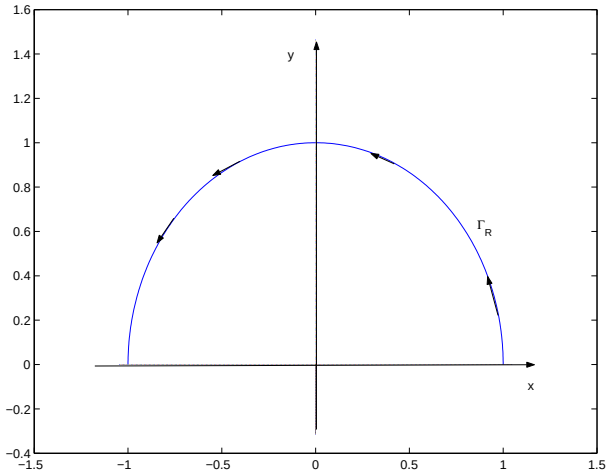
Lemma 110 (DI JORDAN**)** *Sia $f(z)$ analitica con sole singolarità isolate in $\mathcal{I}m\, z > 0$. Supponiamo inoltre*

$$\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0\,, \tag{3.20}$$

il limite essendo calcolato nel semipiano $\mathcal{I}m\, z \geq 0$. Sia $\omega > 0$. Il tal caso,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\omega z} f(z)\,dz = 0\,.$$

Figura 3.8:



La dimostrazione è posposta.

Osservazione 111 Si noti:

- Dalla condizione (3.20) segue che $f(z)$ ha solamente un numero finito di punti singolari in $\mathcal{I}m\, z > 0$.
- Il lemma di Jordan permette di asserire che esiste il *valore principale* dell'integrale improprio di $f(x)$. Niente dice sull'integrale improprio stesso. Si confronti con l'Osservazione 109. ∎

Esaminiamo ora il primo problema, di dare formule semplici per il calcolo dei residui. Ciò è possibile nel caso in cui il punto singolare z_0 è un polo. In questo caso,

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} f_n (z - z_0)^n \,, \qquad f_{-k} \neq 0 \,.$$

Da questa formula dobbiamo ricavare il coefficiente f_{-1}. E' immediato vedere che, se il polo ha ordine k,

$$f_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] \,.$$

Nel caso del polo di ordine 1 si trova in particolare

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \,.$$

Quest'ultima espressione assume un aspetto ancora più semplice nel caso particolare in cui la funzione è data in forma di quoziente,

$$f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}\,.$$

Sia z_0 un polo di ordine 1 di $f(z)$ e supponiamo $n(z_0) \neq 0$, così che $d(z)$ ha uno zero semplice in z_0. In questo caso,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{n(z)}{d(z)} = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}\,.$$

Dimostrazione del Lemma di Jordan, lemma 110

Parametrizziamo Γ_R come

$$\Gamma_R : \quad z(t) = Re^{it}\,, \qquad 0 \le t \le \pi$$

e sia Γ_R^+ la circonferenza ottenuta per $t \in [0, \pi/2]$, Γ_R^- quella ottenuta per $t \in [\pi/2, \pi]$. Mostriamo

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^+} e^{i\omega z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,, \qquad \lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^-} e^{i\omega z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Consideriamo il primo limite (il secondo si tratta in modo analogo). Sia

$$M_R^+ = \max_{\Gamma_R^+} |f(z)|\,.$$

Per ipotesi,

$$\lim_{R\to+\infty} M_R^+ = 0\,.$$

Usando il lemma 12, stimiamo l'integrale come segue:

$$\left|\int_{\Gamma_R^+} e^{i\omega z} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi/2} e^{i\omega Re^{it}} f(Re^{it}) iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\le \int_0^{\pi/2} R\left|e^{i\omega R\cos t - \omega R\sin t} f(Re^{it})\right|\,\mathrm{d}t \le RM(R)\int_0^{\pi/2} e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ora notiamo che[4]

$$-\sin t \le -2t/\pi \qquad \text{per} \quad 0 \le t \le \pi/2$$

[4]osservare che $y = 2t/\pi$ è la corda che unisce $(0,0) = (0, \sin 0)$ con $(\pi/2, 1) = (\pi/2, \sin(\pi/2))$.

e quindi

$$R\int_0^{\pi/2} e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t \le R\int_0^{\pi/2} e^{-2\omega Rt/\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\omega}\left[1-e^{-\omega R}\right]$$

rimane limitato per $R\to+\infty$, perché $\omega>0$. Dunque,

$$\lim_{R\to+\infty} M^+(R)\left[R\int_0^{\pi/2} e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t\right]=0$$

come si voleva.

L'integrale su Γ_R^- si tratta in modo analogo. ∎

3.8 Il Principio dell'argomento

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in una regione Ω, nulla in un punto z_0,

$$f(z)=(z-z_0)^k\phi(z)\,,\qquad \phi(z_0)\neq 0\,.$$

Essendo

$$f'(z)=k(z-z_0)^{k-1}\phi(z)+(z-z_0)^k\phi'(z)$$

si vede che $f'(z)/f(z)$ ha polo semplice, con residuo uguale a k, l'ordine dello zero.

In modo analogo si vede che se

$$f(z)=(z-z_0)^{-k}\phi(z)\,,\qquad \phi(z_0)\neq 0$$

la funzione $f'(z)/f(z)$ ha ancora un polo semplice in z_0, con residuo $-k$, essendo k l'ordine del polo di $f(z)$ in z_0. Dunque, se C è una circonferenza (semplice) di centro z_0 che non racchiude altri zeri o punti singolari di $f(z)$ oltre a z_0, si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\begin{cases} k & \text{se } z_0 \text{ è uno zero di ordine } k\\ -k & \text{se } z_0 \text{ è un polo di ordine } k.\end{cases}$$

Supponiamo ora che γ sia una curva semplice e chiusa in Ω, che non incontra né zeri né punti singolari di $f(z)$. Supponiamo inoltre che i punti singolari siano poli. In tal caso,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = Z-P \tag{3.21}$$

ove Z è la somma delle molteplicità degli zeri racchiusi da γ e P è la somma delle molteplicità dei poli racchiusi da γ. Quest'affermazione va sotto il nome di PRINCIPIO DELL'ARGOMENTO perché, cambiando la variabile di integrazione,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_f}\frac{1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

ove γ_f è l'immagine di γ mediante f,

$$\gamma_f\ :\quad \zeta = f(z(t))\,,\qquad t\in[a,b]\,.$$

Dunque, il membro destro di (3.21) rappresenta l'indice della curva γ_f rispetto all'origine ossia, intuitivamente, il numero dei giri che un punto mobile sulla curva γ_f compie intorno all'origine: detto in modo intuitivo, la "variazione dell'argomento" di ζ quando ζ percorre γ_f.

3.8.1 I teoremi di Hurwitz e Rouché e della mappa aperta

Il *Principio dell'argomento* è alla base di numerosi metodi grafici dell'ingegneria ed ha importanti conseguenze teoriche. Tra queste proviamo i teoremi di Hurwitz e di Rouché e della mappa aperta.

Teorema 112 (DI HURWITZ) *Sia $(f_n(z))$ una successione di funzioni olomorfe su Ω, convergente ad $f(z)$ uniformemente sui compatti di Ω. Supponiamo che la funzione $f(z)$ non sia identicamente nulla e che z_0 sia uno zero di $f(z)$. In ogni intorno di z_0 si annullano tutte le funzioni $f_n(z)$, a parte un numero finito di esse. Inoltre, Sia D un intorno di z_0 su cui $f(z)$ si annulla solo in z_0. Per n sufficientemente grande, il numero degli zeri di $f_n(z)$ in D, contati tenendo conto della molteplicità, è uguale alla molteplicità dello zero z_0 di $f(z)$.*

Dim. Sia D un disco di centro z_0 e contenuto in Ω:

$$D = \{z \mid |z - z_0| < r\}\,.$$

Sia C la circonferenza di D.

Si sa che gli zeri di $f(z)$ sono isolati perché $f(z)$ non è identicamente nulla e quindi il raggio r si può scegliere in modo che $f(z)$ non si annulli su C. La convergenza di $(f_n(z))$ ad $f(z)$, uniforme su C, mostra che per n grande anche $f_n(z)$ non si annulla su C. Dunque, il numero degli zeri può calcolarsi applicando il *Principio dell'argomento* su C:

$$\lim_n \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \, \mathrm{d}z \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = N \geq 1 \, .$$

Dato che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \, \mathrm{d}z$$

prende valori interi e il limite è N, la successione deve essere definitivamente uguale a N. Ciò completa la dimostrazione. ∎

Osservazione 113 Si noti che l'ipotesi $f(z)$ non identicamente nulla non può rimuoversi: la successione delle funzioni costanti

$$f_n(z) = 1/n$$

converge uniformemente alla funzione nulla, e nessuna delle $f_n(z)$ ammette zeri. ∎

Un secondo risultato importante mostra che gli zeri variano con continuità perturbando la funzione.

Teorema 114 (DI ROUCHÉ**)** *Siano $g(z)$ ed $h(z)$ funzioni olomorfe in una regione di Jordan Ω e sia γ una curva semplice e chiusa in Ω.*

Supponiamo che SUL SOSTEGNO di γ *valga la disuguaglianza* STRETTA:

$$|h(z)| < |g(z)| \, . \tag{3.22}$$

In tal caso la somma delle molteplicità degli zeri di $g(z)$ nella regione Ω_γ uguaglia la somma delle molteplicità degli zeri di $g(z) - h(z)$, ancora in Ω_γ.

Dim. Vediamo prima di tutto un argomento intuitivo, che però sarebbe lungo giustificare completamente. Notiamo che

$$\arg(g - h) = \arg\left(g \left[1 - \frac{h}{g} \right] \right) = \arg g + \arg \left[1 - \frac{h}{g} \right] \, .$$

La (3.22) mostra che

$$\left| \frac{h(z)}{g(z)} \right| < 1 \, ,$$

ossia che i punti

$$w = 1 - \frac{h}{g}$$

hanno parte reale positiva. Dunque, la curva parametrizzata da $(1-h/g)$ non gira intorno all'origine, e quindi, percorrendola, la variazione dell'argomento è zero. Dunque, si intuisce che percorrendo γ_{g-h} l'argomento debba variare di tanto quanto varia percorrendo γ_g. E quindi, le due funzioni g e $g-h$ avranno il medesimo numero di zeri racchiusi da γ.

Vediamo ora la dimostrazione rigorosa. Si noti che la disuguaglianza stretta (3.22) implica che né $g(z)$ né

$$\psi(z) = g(z) - h(z)$$

hanno zeri sul sostegno di γ. Possiamo quindi usare il *Principio dell'argomento* e provare

$$\int_\gamma \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z$$

ossia

$$\int_\gamma \left[\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right]\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Ora,

$$\begin{aligned}\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} &= \frac{\psi'(z)g(z) - \psi(z)g'(z)}{g(z)\psi(z)} \\ &= \frac{h(z)g'(z) - h'(z)g(z)}{g(z)[g(z)-h(z)]} = \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\end{aligned}$$

ove

$$\phi(z) = \frac{\psi(z)}{g(z)} = \frac{g(z)-h(z)}{g(z)} = 1 - \frac{h(z)}{g(z)}\,.$$

Va quindi provato che

$$\int_\gamma \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\,\mathrm{d}z = 0\,. \tag{3.23}$$

Di nuovo, quest'integrale ha senso perché né $g(z)$ né $h(z)$ si annullano su γ.

L'uguaglianza (3.23) vale grazie alle considerazioni seguenti. Da (3.22) si ha

$$|1-\phi(z)| < 1 \tag{3.24}$$

sul sostegno di γ.

Il sostegno di γ è compatto e quindi $|1-\phi(z)|$ raggiunge ivi massimo strettamente minore di 1. Dunque, esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$|1-\phi(z)| < 1-\epsilon$$

sul sostegno di γ e questa disuguaglianza vale anche nella regione interna Ω_γ, per il *principio del massimo.* Dunque, per $z \in \mathrm{cl}\,\Omega_\gamma$ si ha

$$|\phi(z)| = |(\phi(z) - 1) + 1| \geq |1 - |\phi(z) - 1|| > \epsilon\,.$$

Per continuità, esiste una regione Ω_1 con $\Omega_\gamma \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega$ su cui vale[5]

$$|\phi(z)| > \epsilon/2\,.$$

Segue che la funzione integranda in (3.23) è olomorfa in una regione che contiene la chiusura di Ω_γ e quindi l'integrale è nullo. ∎

Osservazione 115 La (3.24) permette anche di concludere la dimostrazione con un semplice argomento di tipo geometrico, come segue: essa mostra che la curva γ_ϕ ha sostegno nel disco aperto di centro 1 e raggio 1: non gira intorno all'origine e quindi l'integrale in (3.23) è nullo. ∎

Vediamo alcune conseguenze di questi risultati.

Si ricordi il Teorema di Brower: una funzione $h(z)$ dal disco chiuso $\{z \mid |z| \leq 1\}$ in sé che è *continua,* ammette un punto fisso; ossia, esiste un punto z_0 di norma minore o uguale ad 1, tale che $h(z_0) = z_0$. Ripetiamo che questo teorema vale sotto la sola ipotesi che $h(z)$ sia continua, e la sua dimostrazione è difficile. Se però $h(z)$ è olomorfa e inoltre trasforma il disco chiuso nel disco aperto, una semplice dimostrazione può dedursi dal Teorema di Rouché:

Corollario 116 *Sia $h(z)$ olomorfa su una regione Ω che contiene $\{z \mid |z| \leq 1\}$. Supponiamo che*

$$|z| \leq 1 \Longrightarrow |h(z)| < 1\,.$$

Allora, la funzione $h(z)$ ha un punto fisso z_0 e uno solo. Inoltre, $|z_0| < 1$.

Dim. Si noti che se $h(z_0) = z_0$ allora

$$|z_0| = |h(z_0)| < 1\,.$$

Rimane da provare l'esistenza di z_0, ossia dobbiamo provare che che la funzione $h(z) - z$ ha un unico zero. Confrontiamo $h(z)$ con la funzione

$$g(z) = z\,,$$

[5] infatti, ogni punto del sostegno di γ ha un'intorno su cui questa disuguaglianza vale. Il sostegno di γ è compatto e quindi un numero finito $D_1, \ldots, D_N$ di tali intorni lo copre. La regione Ω_1 è l'unione di questi intorni e di Ω_γ.

che ha un unico zero. Vale

$$|z| = 1 \Longrightarrow |h(z)| < |z| = |g(z)|$$

e quindi $g(z) = z$ e $g(z) - h(z) = z - h(z)$ hanno il medesimo numero di zeri; ossia $h(z) = z$ ha esattamente una soluzione. ∎

Diamo ora un'ulteriore dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

Corollario 117 (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA) *Un polinomio di grado $n > 0$ ha esattamente n zeri complessi.*

Dim. L'ipotesi è che il polinomio ha grado n e quindi può scriversi come

$$z^n + h(z)\,, \qquad h(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,.$$

Il polinomio z^n ha esattamente n zeri (si ricordi che nell'uso del principio dell'argomento gli zeri vanno contati tenendo conto delle molteplicità).

Vale

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{h(z)}{z^n} = 0$$

e quindi

$$|h(z)| < |z^n|$$

su ogni circonferenza $|z| = R$, con R sufficientemente grande. Da qui l'asserto. ∎

Illustriamo ora una ulteriore differenza importante tra le funzioni "regolari" di una variabile reale, e quelle "regolari", nel senso della variabile complessa. Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2\,,$$

da $\mathbf{R}$ in sé. Questa funzione, non costante, è analitica nel senso delle funzioni di variabile reale (è addirittura un polinomio). Il suo dominio è un aperto mentre la sua immagine non è aperta. Proviamo che nel caso delle funzioni olomorfe ciò non può aversi:

Teorema 118 (DELLA MAPPA APERTA) *Una funzione olomorfa e non costante trasforma aperti in aperti.*

Dim. Ricordiamo che i punti di accumulazione degli zeri di una funzione olomorfa e non identicamente nulla su Ω non si accumulano su punti di Ω. Di conseguenza, anche l'insieme

$$\{z \mid f(z) = w\}$$

non ha punti di accumulazione in Ω, salvo nel caso in cui $f(z)$ è costante.

Sia ora w_0 un punto di $f(\Omega)$, z_0 un punto per cui $f(z_0) = w_0$ e sia $r > 0$ tale che

$$D = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subseteq \Omega\,.$$

Avendo notato che $f^{-1}(w_0)$ non ha punti di accumulazione in Ω, si vede che, per r abbastanza piccolo, $f(z) \neq w_0$ se $z \in D \setminus \{z_0\}$.

Vogliamo mostrare che w_0 è interno a $f(\Omega)$.

Indichiamo con C la circonferenza $|z - z_0| = r$, così che $f(z) - w_0$ per $|z - z_0| \leq r$ si annulla solo se $z = z_0$.

Sia

$$m = \min_C |f(z) - w_0| > 0\,, \qquad D_m = \{w \mid |w - w_0| < m/2\}\,.$$

Proviamo che $D_m \subseteq \Omega$. Sia per questo $w_1 \in D_m$ e studiamo l'equazione

$$f(z) = w_1\,.$$

Scrivendo

$$f(z) - w_1 = \underbrace{[f(z) - w_0]}_{g(z)} + \underbrace{[w_0 - w_1]}_{h(z)} = g(z) - h(z)$$

si vede che su C vale

$$|w_0 - w_1| = |h(z)| < \frac{m}{2} < m < |f(z) - w_0| = |g(z)|\,.$$

Dunque, per il *Teorema di Rouché,* $g(z)$ ed $f(z) - w_1$ hanno il medesimo numero di zeri racchiusi da C. Dato che per ipotesi $g(z) = f(z) - w_0$ si annulla, anche $f(z) - w_1$ si deve annullare; ossia esiste $z_1 \in D \subseteq \Omega$ tale che $f(z_1) = w_1$, come si voleva. ∎

Ricordiamo la seguente proprietà topologica: *ogni trasformazione invertibile che trasforma aperti in aperti ha inversa continua.* Dunque:

Teorema 119 *Ogni trasformazione olomorfa e invertibile su una regione Ω ha inversa continua.*

3.9 Trasformazioni conformi

Ricordiamo il *Teorema della mappa aperta,* Teorema 118. Questo teorema implica che l'immagine di una regione mediante una funzione olomorfa è una

regione[6]. Ricordiamo inoltre (dal paragrafo 2.2.7) che una trasformazione olomorfa $f(z)$ tra due regioni Ω ed Ω' è *conforme diretta* se la sua derivata non si annulla. Conviene rinforzare questa definizione, richiedendo che:

1. $f(z)$ è olomorfa su una regione Ω. Sia $\Omega' = f(\Omega)$ l'immagine di Ω. Come si è già notato, Ω' è una regione.

2. la funzione $f(z)$ è iniettiva e quindi ammette inversa $g(z)$ definita su Ω'.

3. la funzione $f'(z)$ non si annulla su Ω. Dunque[7] $g(z)$ è olomorfa su Ω' e si ha:
$$g(f(z)) = z \qquad \text{da cui} \quad g'(f(z))f'(z) = 1\,. \tag{3.25}$$

Da ora in poi, come TRASFORMAZIONE CONFORME tra due regioni Ω ed Ω' intenderemo sempre una trasformazione $f(z)$ che verifica le precedenti condizioni 1-3 .

Vogliamo prima di tutto studiare le trasformazioni conformi da $D = \{z \mid |z| < 1\}$ in sé. E' facile trovare alcune di queste trasformazioni. Tra queste le ROTAZIONI.

$$w = R_\beta(z) = e^{i\beta} z$$

con β numero reale fissato, e anche le trasformazioni che indichiamo con T_a,

$$w = T_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

con $|a| < 1$.

E' facile vedere che T_a trasforma D in sé notando che se $|z| = 1$ allora

$$|T_a z| = \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|}\left|\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}\right| = 1\,.$$

Per il principio del massimo, $|T_a z| \leq 1$ su D. Dunque, T_a trasforma D in D. Per mostrare che è suriettiva e iniettiva, notiamo che essa è invertibile: sia $|w| \leq 1$ e risolviamo l'equazione

$$\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = w\,.$$

[6]più precisamente: il teorema della mappa aperta implica che l'immagine è un insieme aperto; l'immagine è un connesso, e quindi è una regione, perchè l'immagine di un connesso mediante una trasformazione continua è un connesso.

[7]si vedano il Teorema 41 e la formula (2.9).

Questa è risolta da

$$z = \frac{w + a}{1 + \bar{a}w} = T_{-a}w$$

e

$$|-a| = |a| < 1\,.$$

Dato che $T_a^{-1} = T_{-a}$, anche T_a^{-1} è olomorfa e quindi, da (3.25), T_a ha derivata non nulla, ossia è conforme.

Se $a = 0$ si ritrova il caso particolare della trasformazione identità, $z \to z$.

Le trasformazioni T_a si chiamano TRASFORMAZIONI DI MÖBIUS[8].

Ricapitolando, abbiamo trovato due famiglie di trasformazioni conformi da D in D, la famiglia $\mathcal{R}$ delle rotazioni e la famiglia $\mathcal{T}$ delle trasformazioni di Möbius di parametro a, $|a| < 1$. Dunque anche la composizione, in qualsiasi ordine, di rotazioni e trasformazioni di Möbius trasforma D in sé ed è una trasformazione conforme.

Calcoliamo la composizione di due trasformazioni di Möbius,

$$w = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\,, \qquad z = \frac{\zeta - b}{1 - \bar{b}\zeta}\,.$$

La trasformazione composta è

$$w = \frac{1 + a\bar{b}}{1 + \bar{a}b} \cdot \frac{\zeta - [(a + b)/(1 + a\bar{b})]}{1 - \overline{(a + b)/(1 + a\bar{b})}\zeta}$$

e

$$\left|\frac{1 + a\bar{b}}{1 + \bar{a}b}\right| = 1\,, \qquad \left|\frac{a + b}{1 + a\bar{b}}\right| < 1$$

(l'ultima disuguaglianza è immediata calcolando il valore per $\zeta = 0$ e ricordando che la trasformazione composta trasforma il disco in sé). Dunque, $T_a T_b = R_\beta T_{(a+b)/(1+a\bar{b})}$ per un certo valore di $\beta \in \mathbf{R}$,

$$\beta = \frac{1 + a\bar{b}}{1 + \bar{a}b}\,.$$

Ossia, componendo trasformazioni di Möbius si trovano nuovamente trasformazioni di Möbius, *seguite* da una rotazione. Equivalentemente, componendo

[8] più in generale, ogni trasformazione $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ che è invertibile si chiama RASFORMAZIONI DI MÖBIUS. La condizione di invertibilità è la condizione che i coefficienti delle potenze corrispondenti al numeratore e denominatore non abbiano lo stesso rapporto—nel qual caso la funzione è costante—e quindi che sia $ad - bc \neq 0$.

trasformazioni di Möbius si trovano trasformazioni di Möbius *precedute* da una rotazione. Infatti,

$$e^{i\rho}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \frac{(e^{i\rho}z) - ae^{i\rho}}{1-\overline{[ae^{i\rho}]}(e^{i\rho}z)}\,.$$

Vogliamo provare che tutte le trasformazioni conformi di D in sé sono di tale forma. Per questo abbiamo bisogno di premettere:

Lemma 120 (DI SCHWARZ) *Sia $f(z)$ olomorfa su D a valori in D. Se $f(0) = 0$ allora vale*

$$|f(z)| \le |z|\,, \qquad |f'(0)| \le 1. \tag{3.26}$$

Se esiste $z_0 \in D$ per cui

$$|f(z_0)| = |z_0|$$

oppure se

$$|f'(0)| = 1$$

allora $f(z)$ è una rotazione.

Dim. Osserviamo che $|f(z)| \le 1$ per ogni $z \in D$.

Per provare la (3.26), fissiamo $\sigma \in (0,1)$ e consideriamo la funzione

$$g_\sigma(z) = \begin{cases} f(\sigma z)/\sigma z & \text{se} \quad z \neq 0 \\ f'(0) & \text{se} \quad z = 0\,. \end{cases}$$

Questa funzione

1. è olomorfa su $D_{1/\sigma} \setminus \{0\}$ e quindi ha singolarità isolata per $z = 0$;
2. è continua su $D_{1/\sigma}$ e quindi limitata in un intorno di 0.

E' quindi olomorfa nel disco $D_{1/\sigma}$ (incluso 0) per il Corollario 94 del Teorema di Riemann sulle singolarità rimovibili.

Si noti che il raggio di $D_{1/\sigma}$ è strettamente maggiore di 1.

Sulla circonferenza $|z| = 1$ si ha

$$|g_\sigma(z)| = \left|\frac{f(\sigma z)}{\sigma z}\right| \le \frac{1}{\sigma} \quad \text{perchè } |f(z)| < 1\,.$$

Per il principio del massimo si ha quindi, per $|z| < 1$.

$$|g_\sigma(z)| \le \frac{1}{\sigma} \quad \text{ossia} \quad \left|\frac{f(\sigma z)}{\sigma z}\right| \le \frac{1}{\sigma}$$

e quindi

$$|f(\sigma z)| < |z| \, .$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $\sigma \in (0,1)$. La (3.26) si trova passando al limite per $\sigma \to 1^-$.

Per provare le ultime affermazioni, Introduciamo la funzione

$$F(z) = \begin{cases} f(z)/z & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \, . \end{cases}$$

Dal Teorema di Riemann, questa funzione è olomorfa su D perché è ivi continua e limitata.

Supponiamo ora di sapere che per un certo $z_0 \in D$ vale

$$|f(z_0)| = |z_0|, \quad \text{ossia} \qquad |F(z_0)| = 1 \, .$$

Per il principio del massimo modulo, $F(z)$ è costante, $F(z) = a$ con $|a| = 1$ e quindi

$$f(z) = az$$

è una rotazione.

In modo analogo si procede se

$$|f'(0)| = 1 \qquad \text{ossia} \quad |F(0)| = 1 \, . \quad \blacksquare$$

Proviamo ora:

Teorema 121 *Sia $f(z)$ una trasformazione conforme da $D = \{z \mid |z| < 1\}$ in sé. Esiste $a \in \mathbf{C}$, con $|a| < 1$ e $\beta \in \mathbf{R}$ tale che*

$$f(z) = T_a(R_\beta(z))$$

ossia, $f = T_a \circ R_\beta$.

Dim. Sia $a = f(0)$ e consideriamo la trasformazione $g(z)$,

$$g(z) = (T_a f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)} f(z)} \, .$$

Questa funzione manda D in sé, perché $|a| = |f(0)| < 1$ e inoltre $g(0) = 0$. Dunque, per il *Lemma di Schwarz*, $|g'(0)| \leq 1$.

Consideriamo ora la trasformazione $h(z)$ inversa di $g(z)$. Anch'essa è una trasformazione olomorfa da D in sé e inoltre $h(0) = 0$ cosí che applicando il *Lemma di Schwarz* ad $h(z)$ si vede che $|h'(0)| \leq 1$.

Notiamo che

$$h'(z) = \frac{1}{g'\left(h(z)\right)}\,.$$

Dunque, per $z = 0$ si ha

$$|h'(0)| = \left|\frac{1}{g'\left(h(0)\right)}\right| = \left|\frac{1}{g'(0)}\right| \leq 1$$

e quindi valgono contemporaneamente le disuguaglianze

$$|g'(0)| \leq 1\,, \qquad |g'(0)| \geq 1\,.$$

Si ha dunque

$$|g'(0)| = 1\,.$$

Per la seconda parte del *Lemma di Schwarz,* $g(z)$ è una rotazione, $g(z) = R_\beta(z)$ per qualche $\beta \in \mathbf{R}$. Dunque,

$$f(z) = \left(T_{-f(0)} \circ R_\beta\right)(z)\,. \quad \blacksquare$$

Osservazione 122 La dimostrazione del Teorema 121 usa le tre condizioni della definizione di trasformazione conforme:

1. l'iniettività di f si è usata per dedurre l'iniettività di g;
2. la condizione che f' non si annulli si usa per dire che h, funzione inversa di g, ha derivata continua su D. Infatti, da

   $$g(h(z)) = z$$

   si ha

   $$1 = g'(h(z))h'(z) = (T_a)'(f(h(z)))f'(h(z))h'(z)\,.$$

3. la suriettività di f si è usata per dire che h è definita su D e quindi per applicare ad essa il lemma di Schwarz. $\blacksquare$

Abbiamo quindi trovato tutte le trasformazioni conformi di D in sé. Procedendo in modo analogo si potrebbero trovare tutte le trasformazioni conformi da un qualsiasi semipiano in D. Noi ci limitiamo ad una particolare.

Col simbolo Π_+ indichiamo il semipiano

$$\Pi_+ = \{z \mid \Re e\, z > 0\}$$

e notiamo che la trasformazione $\Psi(z)$,

$$w = \Psi(z) = \frac{z-1}{z+1}\,, \tag{3.27}$$

trasforma Π_+ in D ed è invertibile, la sua inversa essendo data da

$$z = \frac{w+1}{1-w}$$

da D in Π_+. Inoltre, $\psi'(z) \neq 0$ in Π_+ e quindi $\Psi(z)$ *è una trasformazione conforme di* Π_+ *in* D.

Usiamo la trasformazione $\Psi(z)$ per estrarre una conseguenza assai forte dal Teorema di Liouville.

Teorema 123 *Sia $f(z)$ una funzione intera che non prende valori in un segmento. La funzione $f(z)$ è costante.*

Dim. Non è restrittivo assumere che il segmento sia

$$S : \quad x + i0\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

Dunque, per ipotesi,

$$f(z) \notin S \qquad \forall z \in \mathbf{C}\,.$$

Consideriamo la funzione

$$\phi(z) = \frac{z}{z-1} = 1 - \frac{1}{1-z}\,.$$

Notiamo che

$$\text{l'equazione } \phi(z) = -x + i0\,, \quad x > 0\,, \text{ è risolta da } z = \tfrac{x}{1+x} \in S.$$

Dunque, $\phi(z)$, definita per $z \neq 1$, è una funzione olomorfa e invertibile, che trasforma in modo biunivoco il segmento $[0,1)$ sul semiasse reale negativo.

Dato che $f(z)$ è intera e non prende valori in S,

$$g(z) = \phi(f(z))$$

è intera e non prende valori sull'asse reale negativo e dunque si può definire la funzione

$$g^{1/2}(z)\,,$$

olomorfa su $\mathbf{C}$, a valori in Π_+, si veda il paragrafo 2.2.4. Dato che la funzione $g^{1/2}(z)$ prende valori in Π_+, componendola con la trasformazione Ψ in (3.27) si trova una funzione intera a valori in D, e quindi limitata. Per il *Teorema di Liouville* essa è costante e quindi $f(z)$ stessa è costante. ∎

3.9.1 Il teorema di Riemann sulle trasformazioni conformi

TEOREMA DI RIEMANN mostra una condizione topologica perché una regione sia conforme ad un disco. Prima di enunciarlo, è bene notare che non tutte le regioni possono essere trasformate biunivocamente su un disco mediante una trasformazione olomorfa. Infatti:

Esempio 124 Nessuna funzione olomorfa trasforma in modo biunivoco $\mathbf{C}$ su una regione limitata: infatti una tale funzione sarebbe intera e limitata e quindi costante, ossia non biunivoca. ∎

E' un po' più macchinoso vedere il risultato seguente:

Teorema 125 *Sia D il disco di centro 0 e raggio 1 e sia $D_0 = D \setminus \{0\}$. Nessuna funzione olomorfa trasforma in modo biunivoco D_0 su D.*

Dim. Per assurdo, supponiamo che tale funzione $f(z)$ esista. Questa funzione è olomorfa su D_0 e quindi 0 ne è singolarità isolata. Essendo $f(D_0) = D$ la funzione è limitata e dunque, per il *teorema di Riemann,* 0 è singolarità rimovibile.

Indichiamo con $\tilde{f}(z)$ l'estensione olomorfa di $f(z)$ a $\mathrm{cl}\, D_0 = D$. Per continuità, $|\tilde{f}(0)| \leq 1$ e in realtà $|w_0| = |\tilde{f}(0)| < 1$per il *Teorema del massimo modulo,* poichè la funzione non è costante. Dunque:

$$w_0 = \tilde{f}(0) \in D\,.$$

Dato che $f(z)$ trasforma D_0 su D, esiste $z_0 \neq 0$ tale che $f(z_0) = w_0$.

Siano $\tilde{U}$ ed U intorni disgiunti rispettivamente di 0 e di z_0. Per il *teorema della mappa aperta* le loro immagini sono insiemi aperti e non disgiunti perchè contengono w_0. Dunque, $\tilde{f}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}(U) = V \neq \emptyset$ è un insieme aperto in D ed esiste $w_1 \in V$, $w_1 \neq w_0$. Dunque esistono $\tilde{z}_1 \neq 0$ in $\tilde{U}$ e $z_1 \in U$ tali che $w_1 = f(z_1) = \tilde{f}(\tilde{z}_1) = f(\tilde{z}_1)$. Ciò contraddice il fatto che f è biunivoca. ∎

Enunciamo ora il Teorema di Riemann in generale. Il teorema verrà quindi provato nel caso particolare delle regioni di Jordan.

Teorema 126 (DI RIEMANN) *Sia Ω una regione semplicemente connessa che non è tutto il piano complesso. Esiste una funzione olomorfa che trasforma Ω su D in modo biunivoco.*

Dim. (Il teorema si prova nel caso particolare in cui Ω è una regione di Jordan Ω_γ)

Fissiamo un punto $\hat{z} \in \Omega_\gamma$. Essendo Ω_γ limitata, essa è contenuta in un disco D_R di raggio R e centro $\hat{z}$. La trasformazione conforme $z \to (z-\hat{z})/(R+1)$ trasforma D_R in $D = \{z \mid |z| < 1\}$ e quindi Ω_γ in D.

Quindi possiamo supporre di aver già applicato questa prima trasformazione conforme. In questo modo ci si riduce a provare il teorema per una regione $\Omega_\gamma \subseteq D$.

Se accade che $\Omega_\gamma = D$ niente va provato. Dunque

$$\text{assumiamo} \qquad \begin{cases} \Omega_\gamma \subseteq D \\ \exists z_0 \in D \setminus \Omega_\gamma \,. \end{cases}$$

La trasformazione di Möbius $T_{z_0}(z)$ trasforma z_0 in 0 e D in sé. Dunque, trasforma Ω_γ in D e trasforma z_0 in 0. La trasformazione $T_{z_0}(z)$ è iniettiva da Ω_γ in D ma non è però suriettiva perché $\Omega \neq D$.

Osservare che

$$T'_{z_0}(z_0) = 1 \neq 0 \,. \tag{3.28}$$

Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ delle trasformazioni che hanno queste proprietà:

1. ogni $f \in \mathcal{F}$ è *olomorfe ed iniettive da Ω_γ a D.*
2. se $f \in \mathcal{F}$ allora $f(z_0) = 0$.

La famiglia $f \in \mathcal{F}$ è non vuota perchè contiene $T_{z_0}(z)$.

Il teorema è dimostrato se si riesce a provare che $\mathcal{F}$ contiene una trasformazione suriettiva.

Si noti che se $f(z) \in \mathcal{F}$ allora $|f(z)| < 1$ e quindi, per il *teorema di Montel,* ogni successione in $\mathcal{F}$ contiene s.successioni convergenti uniformemente sui compatti di Ω_γ. Inoltre, se $f(z) \in \mathcal{F}$,

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \right| \leq \frac{1}{r}$$

se C è una circonferenza di raggio r e centro z_0, contenuta in Ω_γ. Dunque,

$$M_{\mathcal{F}} = \sup\{|f'(z_0)| \,,\ f \in \mathcal{F}\} < +\infty \,.$$

Da (3.28) si vede anche che

$$M_{\mathcal{F}} \neq 0 \,.$$

Sia $(f_n(z))$ una successione in $\mathcal{F}$, tale che

$$\lim |f_n'(z_0)| = M_{\mathcal{F}}\,.$$

Ancora grazie al teorema di Montel, estraendo una s.successione, si può supporre che la $(f_n(z))$ stessa converga ad una funzione olomorfa $f_0(z)$, uniformemente sui compatti di Ω_γ e quindi, per il teorema di Weierstrass e per la continuità della funzione modulo,

$$|f_0'(z_0)| = \lim |f_n'(z_0)| = M_{\mathcal{F}} \neq 0\,, \qquad f_0(z_0) = 0\,.$$

Proviamo che la funzione $f_0(z)$ è iniettiva, e quindi che appartiene a $\mathcal{F}$. Fissiamo un punto $z_2 \in \Omega_\gamma$ e mostriamo che $f_0(z) \neq f_0(z_2)$ per ogni altro punto $z \neq z_2$ di Ω_γ. Per questo consideriamo le funzioni $\psi_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ e $\psi_0(z) = f_0(z) - f_0(z_2)$. Si sa che $\psi_n(z)$ non si annulla e converge a $\psi_0(z)$ uniformemente sui compatti. Si sa inoltre che $\psi_0(z)$ non è identicamente nulla, dato che $\psi_0'(z_0) = f_0'(z_0) \neq 0$.

Dal *teorema di Hurwitz,* se esistesse z_1 per cui $\psi_0(z_1) = 0$ allora si potrebbe trovare un intorno U di z_1 su cui $\psi_n(z)$ si annulla, almeno per n sufficientemente grande. Sapendo già che ciò non avviene segue che $\psi_0(z_1) \neq 0$ ossia $f_0(z_1) \neq f_0(z_2)$ per ogni $z_1 \in \Omega$ diverso da z_2.

In conclusione, $f_0(z)$ è iniettiva e quindi $f_0(z)$ appartiene ad $\mathcal{F}$.

Proviamo ora che la funzione $f_0(z)$ è anche suriettiva, completando così la dimostrazione del teorema. *Per assurdo supponiamo che non lo sia e sia a uno dei valori di D che essa non assume.*

Consideriamo la funzione

$$\phi(z) = \sqrt{\frac{a - f_0(z)}{1 - \bar{a} f_0(z)}}\,.$$

Dato che Ω_γ è una regione di Jordan, e che il radicando non si annulla su Ω_γ, è possibile definire una determinazione della radice quadrata, in modo da avere $\phi(z)$ olomorfa su Ω_γ, si veda il paragrafo 2.2.4. La $\phi(z)$ è quindi olomorfa e, essendo ottenuta applicando ad $f(z)$ prima la trasformazione di Möbius T_a e poi una determinazione della radice quadrata, è iniettiva. Essa non apparterrà a $\mathcal{F}$ perché in generale $\phi(z_0) \neq 0$. Applichiamo dunque a $\phi(z)$ la trasformazione di Möbius che riporta $\phi(z_0)$ in 0. Si trova

$$g(z) = \frac{\phi(z) - \sqrt{a}}{1 - \overline{\sqrt{a}}\phi(z)}$$

e la funzione $g(z)$ è ora un elemento di $\mathcal{F}$.

Calcoliamo $g'(z_0)$. Procediamo in due passi:

$$g'(z) = \frac{\phi'(z)\left[1 - \overline{\sqrt{a}}\phi(z)\right] + [\phi(z) - \sqrt{a}]\,\overline{\sqrt{a}}\phi'(z)}{\left[1 - \overline{\sqrt{a}}\phi(z)\right]^2}$$

così che

$$g'(z_0) = \frac{1}{1 - |\sqrt{a}|^2}\phi'(z_0)\,.$$

Ora calcoliamo

$$\phi'(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 - \bar{a}f_0(z)}{a - f_0(z)}}\frac{-1 + |a|^2}{[1 - \bar{a}f_0(z)]^2}f_0'(z)$$

così che

$$\phi'(z_0) = -\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(1 - |\sqrt{a}|^2\right)\left(1 + |\sqrt{a}|^2\right)f_0'(z_0)\,.$$

Combinando insieme queste uguaglianze si trova

$$g'(z_0) = -\left[\frac{1 + |\sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}\right]f'(z_0)\,, \qquad |g'(z_0)| = M_{\mathcal{F}} \cdot \left|\frac{1 + |\sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}\right|\,.$$

Ora,

$$\left|\frac{1 + |\sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}\right| = \frac{1 + |a|}{2|\sqrt{a}|} > 1$$

perché $1 + |\sqrt{a}|^2 - 2|\sqrt{a}| > 0$, l'uguaglianza essendo stretta, dato che $|a| < 1$. Dunque, $|g'(z_0)| > M_{\mathcal{F}}$, in contrasto con la definizione del numero $M_{\mathcal{F}}$.

La contraddizione trovata prova il teorema. ∎

Abbiamo provato il teorema di Riemann nel caso particolare in cui la regione Ω è la regione interna ad una curva di Jordan γ. In questo caso può dirsi di più:

Teorema 127 *Sia Ω_γ una regione di Jordan e sia $f(z)$ una funzione olomorfa che è conforme da Ω_γ su D. La funzione $f(z)$ può estendersi con continuità a $\partial\Omega_\gamma$.*

Omettiamo la dimostrazione, che è molto complessa.

3.10 Funzioni analitiche secondo Weierstrass

Ricordiamo i termini FUNZIONE UNIVOCA e FUNZIONE MULTIVOCA che si usano comunemente nella teoria degli insiemi. Per ragioni storiche, nel contesto delle funzioni di variabile complessa, questi termini vengono sostituiti come segue: Una funzione che ad ogni punto del suo dominio associa un (solo) numero si chiama MONÒDROMA mentre una funzione che ad alcuni dei punti del suo dominio associa un insieme di numeri si chiama POLÌDROMA.

Le funzioni che abbiamo studiato fino a questo punto sono funzioni monodrome, ma abbiamo visto al para. 2.2.6 che è utile studiare anche funzioni multivoche. Abbiamo accennato al fatto che funzioni inverse che sono multivoche si possono "leggere" come funzioni univoche, pur di farle agire tra opportune superfici di Riemann. Qui vogliamo accennare ad un modo diverso di trattare le funzioni multivoche, dovuto a Weierstrass.

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa su una regione Ω. Si è già notato che sviluppando la funzione in serie di Taylor con centro un punto z_1 di Ω, può essere che la serie converga su un disco che fuoriesce da Ω. In tal caso usando la serie si trova un'estensione di $f(z)$. Per studiare meglio questo fenomeno, introduciamo questo termine: chiamiamo ELEMENTO ANALITICO (più semplicemente ELEMENTO) la coppia di una regione Ω e di una funzione $f(z)$ olomorfa su Ω. Se Ω è un disco di centro z_0 e quindi $f(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor di centro z_0 e disco di convergenza contenente Ω, l'elemento si chiamerà CANONICO.

Due elementi $(\Omega_1, f_1(z))$ e $(\Omega_2, f_2(z))$ si dicono EQUIVALENTI se $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ e se

$$f_1(z) = f_2(z) \qquad \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \,.$$

Se $\mathcal{E}_i$, $i = 1,\ldots,n$ sono *elementi canonici* e se ciascuno è equivalente al precedente, l'insieme degli $\mathcal{E}_i$ si chiama una CATENA. L'elemento $\mathcal{E}_1$ si dirà il *primo* elemento della catena ed $\mathcal{E}_n$ l'*ultimo.* Diremo anche che la catena è una FUNZIONE ANALITICA SECONDO WEIERSTRASS ottenuta da $\mathcal{E}_1$ per prolungamento lungo CATENE DI CERCHI.

In generale, chiameremo FUNZIONE ANALITICA SECONDO WEIERSTRASS l'insieme di *tutti* gli elementi canonici che fanno parte di *tutte* le catene che si ottengono prolungando per catene di cerchi un elemento dato.

La definizione di funzione analitica secondo Weierstrass dipende quindi dal primo elemento che è stato scelto. Si prova però che scegliendo come primo elemento un altro elemento della stessa funzione analitica, la funzione analitica non cambia.

Esempio 128 Si consideri la funzione

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i(\mathrm{Arg}\, z)/2}$$

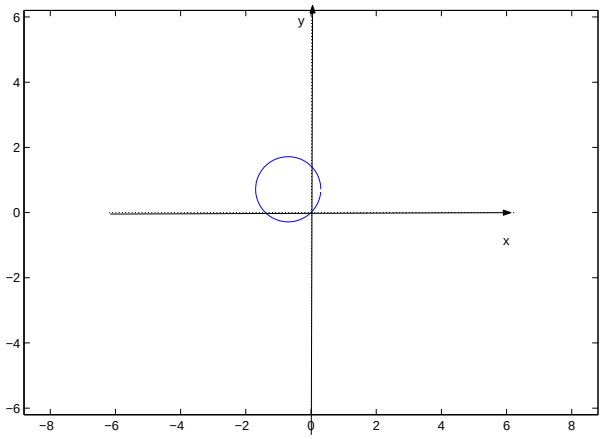
che è olomorfa nella regione $|\mathrm{Arg}\, z| < \pi$. Fissiamo z_0 e sviluppiamo la funzione in serie di Taylor, di centro z_0. Si trova

$$f(z) = [(z - z_0) + z_0]^{1/2} = f(z_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} 1/2 \\ n \end{array} \right) \frac{1}{z_0^n} (z - z_0)^n$$

e questa serie ha raggio di convergenza uguale a $|z_0|$.

Sia z_0 il punto indicato in figura 128. La serie definisce una funzione

Figura 3.9:



olomorfa anche attraverso un segmento dell'asse reale negativo. Dunque, l'estensione così ottenuta di $f(z)$ coincide con la funzione data nei punti del terzo quadrante, ma non in quelli del quarto.

Si confronti con quanto detto ai paragrafi 2.2.4 e 3.2.3. ∎

L'esempio precedente mostra che elementi diversi della medesima catena possono prendere valori diversi nel medesimo punto. Ciò suggerisce di definire MONÒDROMA o UNIVALENTE una funzione analitica secondo Weierstrass che ha la seguente ulteriore proprietà: siano (D_i, f_i) e (D_j, f_j) elementi diversi. Se $z_0 \in D_i \cap D_j$ allora vale $f_i(z_0) = f_j(z_0)$; altrimenti la funzione si dice POLÌDROMA.

Possiamo ora dare la seguente definizione generale di SINGOLARITÀ ISOLATA: il punto z_0 sia di accumulazione per il dominio Ω di un elemento $(\Omega, f(z))$. Diciamo che il punto z_0 è una singolarità isolata se è possibile estendere $f(z)$ ad un intorno di z_0, escluso z_0, mediante *una* catena di cerchi la cui unione *non* contienez_0. Va osservato che questa definizione fa riferimento ad una catena. Niente vieta che una diversa catena produca un'estensione ad un intorno di z_0, incluso il punto z_0.

Esempio 129 Sia $z_0 = 1$ e sia

$$f(z) = \frac{1}{1+\sqrt{z}}$$

ottenuta scegliendo

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i[\pi+(\operatorname{Arg} z)/2]} = -\sqrt{|z|}e^{i(\operatorname{Arg} z)/2}\,. \tag{3.29}$$

Si vede che il punto $z_0 = 1$ è singolare per $f(z)$ nonostante che

$$g(z) = \frac{1}{1+\sqrt{|z|}e^{i(\operatorname{Arg} z)/2}}$$

sia regolare in $z_0 = 1$, e sia un'estensione per catene di cerchi di (3.29) come si è visto nell'esempio 128. ∎

Quest'osservazione suggerisce di estendere come segue la definizione di punto di diramazione.

Sia z_0 un punto singolare isolato di una funzione analitica secondo Weierstrass. Si dice che il punto z_0 è un PUNTO DI DIRAMAZIONE se *ogni* intorno di z_0 contiene una catena di cerchi della funzione i cui domini coprono una circonferenza centrata in z_0 escluso z_0, e col primo elemento che non è equivalente all'ultimo.

Esempio 130 La funzione

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i(\operatorname{Arg} z)/2}$$

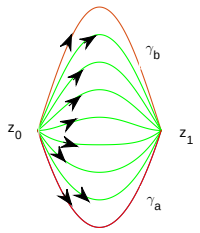
ha $z_0 = 0$ come punto di diramazione, perché, come si è visto all'esempion 128 estendendo per catene di cerchi si passa dall'una all'altra determinazione della radice. Osservazione analoga vale per la funzione $\operatorname{Log} z$. ∎

Osservazione 131 I punti di diramazione non sono stati considerati nello studio dei punti singolari di funzioni olomorfe. Infatti, *con riferimento ad un singolo elemento olomorfo* (Ω, f), essi non sono punti singolari isolati: ogni loro intorno contiene punti nei quali la funzione $f(z)$ è discontinua. ∎

Mostriamo infine che una funzione analitica secondo Weierstrass, se non ha punti singolari in una *regione di Jordan* Ω coincide con un elemento olomorfo.

Teorema 132 (di monodromia) *Sia* Ω *una* regione di Jordan *contenuta nel dominio di una funzione analitica secondo Weierstrass. La funzione è univalente su* Ω.

Figura 3.10:



Dim. Illustriamo l' *idea* della dimostrazione facendo riferimento alla figura 3.10. Si fissi un punto $z_0 \in \Omega$. Se la funzione non è univalente, è possibile trovare $z_1 \in \Omega$ e due curve γ_a e γ_b congiungenti z_0 con z_1, tali che l'estensione di $f(z)$ da z_0 a z_1 lungo catene di cerchi centrati in γ_a, rispettivamente in γ_b, conduce a valori f_1, f_2, tra loro diversi. Dobbiamo provare che ciò non accade.

Non è restrittivo assumere che le due curve siano semplici e prive di punti comuni, a parte gli estremi.

Indichiamo con γ la curva di Jordan ottenuta prima percorrendo γ_a da z_0 a z_1 e poi tornando a z_0 longo la γ_b.

Si noti che $\Omega_\gamma \subseteq \Omega$ perché Ω è regione di Jordan.

Sia d la distanza di γ da $\partial\Omega$. Indichiamo con Ω_γ la regione interna a γ e siano

$$\gamma_0 = \gamma_a\,, \quad \gamma_1\,, \quad \ldots\,, \gamma_{n-1}\,, \quad \gamma_n = \gamma_b$$

curve con $\gamma_i \in \Omega_\gamma$ per $i \neq 0$ e $i \neq n$, distanti l'una dall'altra *meno* di d, si veda la figura 3.10.

Prolungando $f(z)$ da z_0 a z_1 lungo $\gamma_a = \gamma_0$ e lungo γ_1, si trova in z_1 il medesimo valore $f(z_1)$ perché ciascun cerchio della catena centrato su punti di γ_0 interseca il sostegno di γ_1 e viceversa, dato che i raggi di convergenza delle serie che si ottengono sono almeno uguali a d.

Lo stesso accade per γ_1 e γ_2 e quindi anche prolungando lungo una catena di cerchi centrati in γ_1 si ritrova lo stesso valore di $f(z_1)$.

Dopo un numero n di passi si vede che il valore di $f(z_1)$ che si trova prolungando lungo una catena di cerchi centrati su γ_b coincide con quello che si trova prolungando con cerchi centrati su γ_a. E quindi la restrizione ad Ω della funzione $f(z)$ è univalente. ∎

Osservazione 133 Il teorema precedente non vieta che seguendo curve che congiungono z_0 con z_1 *e che escono da* Ω, si trovi un valore diverso per $f(z_1)$. ∎

Capitolo 4

Funzioni armoniche

In generale si chiama funzione armonica una funzione $u(x_1, \ldots, x_n)$ di classe C^2 su un aperto $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ e che ivi verifica L'EQUAZIONE DI LAPLACE

$$u_{x_1,x_1} + \cdots + u_{x_n,x_n} = 0\,.$$

La teoria delle funzioni armoniche è importantissima per le applicazioni, e ricchissima di risultati. Noi ci limitiamo a presentare poche proprietà delle funzioni armoniche di *due* variabili, facendole discendere da quelle delle funzioni olomorfe. Mostreremo quindi un'applicazione alla soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace.

4.1 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe

Si è già notato che le parti reali ed immaginarie di funzioni olomorfe sono funzioni armoniche. Al Teorema 68 abbiamo provato il viceversa. Ricordiamo questo risultato:

Teorema 134 *Sia Ω una regione di Jordan di $\mathbf{R}^2$ oppure sia $\Omega = \mathbf{R}^2$ e sia $u(x, y)$ armonica su Ω e di classe C^1. Esiste una funzione $v(x, y)$ armonica su Ω e tale che $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è olomorfa su Ω. Dunque, ogni funzione armonica di classe C^1 è anche di classe C^∞.*

Se $u(x, y)$ è continua sulla chiusura di Ω anche $f(x, y)$ è ivi continua.

Fissato un punto $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega$, il teorema precedente può applicarsi in un suo intorno e quindi:

Corollario 135 *Ogni funzione armonica è localmente parte reale di una funzione olomorfa. Dunque, ogni funzione armonica è in particolare di classe C^∞.*

Di conseguenza, per le funzioni armoniche valgono i teoremi che abbiamo provato per le parti reali di funzioni olomorfe:

- il teorema della media (Teorema 70);
- il principio sia del massimo che del minimo (Teorema 87);
- il teorema di Liouville (Teorema 92).

La funzione $v(x, y)$ che si associa ad $u(x, y)$ in modo da avere $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ olomorfa si chiama FUNZIONE ARMONICA CONIUGATA di $u(x, y)$. Essa non è unica: *due funzioni armoniche su un regione Ω, coniugate della stessa funzione armonica $u(x, y)$ hanno differenza costante* perché questa proprietà vale per i potenziali di un medesimo campo vettoriale.

Conviene ora elencare alcune funzioni armoniche. Naturalmente sono funzioni armoniche i polinomi di grado 0 oppure 1, e sono funzioni armoniche i polinomi

$$u(x, y) = x^2 - y^2\,, \qquad u(x, y) = xy\,.$$

Ma non tutti i polinomi sono funzioni armoniche: $u(x, y) = x^2 + y^2$ non lo è. Ciò nonostante,

$$\operatorname{Log}(x^2 + y^2) = 2\Re e \operatorname{Log} z$$

è armonica sul complementare di $\arg z = -\pi$. Sulla stessa regione è anche armonica la funzione

$$u(x, y) = \arctan \frac{y}{x}\,.$$

Un calcolo diretto mostra che in realtà queste funzioni sono armoniche su $\mathbf{R}^2 - (0, 0)$.

4.2 La proprietà della media e il teorema di Gauss

Si è visto che per le funzioni armoniche vale la proprietà della media

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.1}$$

Vale anche il viceversa:

Teorema 136 *Sia Ω una regione di Jordan e sia $u(x, y)$ una funzione di classe $C^2(\Omega)$. Se per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$ vale l'uguaglianza (4.1) almeno per ogni r sufficientemente piccolo, allora la funzione $u(x, y)$ è armonica su Ω.*

Dim. Dobbiamo provare che $\Delta u = 0$ su Ω. Notiamo che è sufficiente provare che

$$\int_D \Delta u(x,y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 0 \tag{4.2}$$

per per ogni disco $D \subseteq \Omega$ con raggio abbastanza piccolo. Infatti se in un punto (x_0, y_0) fosse $\Delta u(x_0, y_0) > 0$, per continuità si avrebbe anche $\Delta u(x,y) > 0$ su un opportuno disco D, e quindi l'integrale (4.2) non potrebbe essere nullo.

Derivando rispetto ad r i due membri di (4.1). Si trova:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} [u_x(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\cos t + u_y(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\sin t]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{C_r} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s\,, \end{aligned}$$

ove C_r indica la circonferenza parametrizzata da

$$t \to (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

ed $n = n(t)$, parametrizzata da

$$n(t) = (x_0 + \cos t, y_0 + \sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

la sua normale *esterna.* Si usi ora il teorema di Gauss:

$$0 = \int_{C_r} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \int_D \Delta u(x,y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,.$$

Ciò è quanto volevamo provare. ∎

Nella dimostrazione precedente abbiamo usato il teorema di Gauss in un caso particolare: il caso in cui la regione è una circonferenza. Si sa che esso vale più in generale e ciò permette di provare:

Teorema 137 (DI GAUSS) *Sia Ω una regione di Jordan. Supponiamo $u(x,y) \in C^2(\Omega)$, continua sulla chiusura di Ω. La funzione $u(x,y)$ è armonica se e solo se*

$$\int_\gamma \frac{\partial}{\partial n} u\ ds = 0 \tag{4.3}$$

per ogni *curva di Jordan regolare a tratti il cui sostegno è in Ω.*

Dim. Nelle ipotesi che abbiamo detto vale

$$\int_{\Omega_\gamma} \Delta u(x,y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial n} u\,\mathrm{d}s\,.$$

E quindi, se $u(x, y)$ è armonica, vale

$$\int_\gamma \frac{\partial}{\partial n} u \, \mathrm{d}s = 0 \, ;$$

se, viceversa, la (4.3) vale per ogni γ, curva di Jordan con sostegno in Ω, scegliendo per γ le circonferenze, si trova

$$\int_D \Delta u(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0$$

per ogni disco in Ω e quindi $\Delta u = 0$ in Ω. ∎

4.3 Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Mostriamo ora come la teoria delle funzioni olomorfe ed il *Teorema di Riemann sulle trasformazioni conformi* conducano a risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace.

4.3.1 I problemi di Dirichlet e di Poisson

Si chiama PROBLEMA DI DIRICHLET per l'equazione di Laplace il problema seguente: è data una curva di Jordan γ (regolare a tratti) e una funzione $g(x, y)$ continua sul suo sostegno. Si vuole una funzione $u(x, y)$ *armonica* in Ω_γ, *continua* nella *chiusura* di Ω_γ e tale che

$$u_{|\gamma} = g \, ;$$

Dunque, si vuole che la u risolva

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\gamma \, , \qquad u_{|\gamma} = g \, .$$

Si parla di PROBLEMA DI POISSON quando è data anche una funzione continua $h(x, y)$ in Ω_γ e si vuol risolvere

$$\Delta u = h \quad \text{in} \quad \Omega_\gamma \, , \qquad u_{|\gamma} = g \, . \tag{4.4}$$

Più avanti potremo studiare il problema dell' *esistenza* di soluzioni del problema di Dirichlet. Per ora, limitiamoci a studiare alcune proprietà delle soluzioni, se queste esistono. Proviamo:

Teorema 138 *Se esiste, una soluzione $u(x,y)$ di (4.4) è unica.*

Dim. Ricordiamo che, per la definizione che abbiamo dato di soluzione, la $u(x,y)$ è continua nella chiusura di Ω_γ.

Siano $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$ due diverse soluzioni di (4.4)e definiamo

$$w(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)\,.$$

La $w(x,y)$ è una soluzione del problema di Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\gamma\,, \qquad u_{|_\gamma} = 0\,.$$

In particolare, è una funzione armonica. Essendo continua sulla chiusura di Ω_γ, essa ivi raggiunge massimo e minimo; essendo armonica, massimo e minimo sono raggiunti su $\gamma = \partial\Omega_\gamma$ e quindi sono ambedue nulli: la funzione $w(x,y)$ è nulla e quindi $u_1(x,y) = u_2(x,y)$. ∎

Nello stesso modo si può vedere che le soluzioni "dipendono con continuità" dal dato g. Consideriamo per questo i due problemi di Poisson

$$\Delta u = h \quad \text{in} \quad \Omega_\gamma\,, \qquad u_{|_\gamma} = g_1\,, \tag{4.5}$$

$$\Delta u = h \quad \text{in} \quad \Omega_\gamma\,, \qquad u_{|_\gamma} = g_2\,. \tag{4.6}$$

con la medesima funzione $h(x,y)$. Supponiamo che esistano $u_1(x,y)$, soluzione di (4.5) e $u_2(x,y)$, soluzione di (4.6). Sia ha:

Teorema 139 *Le funzioni $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$ verificano la diseguaglianza*

$$\sup_{\Omega_\gamma} |u_1(x,y) - u_2(x,y)| \le \max_\gamma |g_1(x,y) - g_2(x,y)|\,.$$

Dim. Introduciamo ancora la funzione $w(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$. Questa funzione è armonica in Ω_γ e continua sulla sua chiusura e inoltre su γ vale $w(x,y) = g_1(x,y) - g_2(x,y)$. Dunque, dal principio del massimo e del minimo per le funzioni armoniche, si ha

$$\min_\gamma [g_1(x,y) - g_2(x,y)] \le w(x,y) \le \max_\gamma [g_1(x,y) - g_2(x,y)]\,. \quad ∎$$

4.3.2 La formula di Poisson

Ricordiamo che la formula della media permette di esprimere il valore $u(0,0)$ di una funzione armonica su un disco centrato in $(0,0)$, mediante i valori $u(R\cos t, R\sin t)$, che la funzione assume su una circonferenza di centro $(0,0)$.

Chiediamoci ora se si riesce a trovare una formula che, per mezzo di tali valori, esprima anche $u(x,y)$, per ogni (x,y) del disco, ossia tale che

$$x^2+y^2<R^2\,.$$

Vedremo che ciò può farsi e quindi troveremo una formula risolutiva per il problema di Diriclet nel disco.

Sia $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ e scriviamo la formula di Cauchy

$$\begin{aligned} &u(x,y)+iv(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-(x+iy)}\,\mathrm{d}\zeta\,,\\ &C:\quad t\to Re^{it}\,,\qquad t\in[0,2\pi]\,. \end{aligned}$$

Parametrizzando la circonferenza si trova

$$u(x,y)+iv(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{it})\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.7}$$

Passando alle parti reali, a sinistra si trova $u(x,y)$ ma a destra si trova un'espressione complicata, che fa intervenire sia i valori di $u(x,y)$ che quelli di $v(x,y)$ perchè il fattore

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{Re^{it}-(x+iy)}Re^{it}$$

non prende valori reali se $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Modifichiamo la formula di Cauchy in modo che l'integrando sia la funzione $f(Re^{it})$ moltiplicata per una funzione reale.

Osserviamo che la formula integrale di Cauchy implica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{\bar z}{\bar z\zeta-R^2}\,\mathrm{d}\zeta=0$$

dato che il denominatore è nullo soltanto per $\zeta=R^2/\bar z$, punto *esterno* alla circonferenza. Parametrizzando la circonferenza s si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{it})\frac{\bar z e^{it}}{\bar z Re^{it}-R^2}\,\mathrm{d}t=0\,. \tag{4.8}$$

Sottraendo (4.8) da (4.7) si ha

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{it})\left[\frac{R}{Re^{it}-z}-\frac{\bar z}{\bar z e^{it}-R}\right]e^{it}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{it})\frac{R^2-|z|^2}{R^2+|z|^2-2\Re e\,[(Rz)e^{-it}]}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Nella formula precedente l'integrando è la funzione $f(z)$ moltiplicata per una funzione a valori reali.

Sia ora

$$z = re^{i\theta} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta\,. \end{cases}$$

La formula precedente si scrive

$$\begin{aligned} &u(x,y) + iv(x,y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(R\cos t, R\sin t) + iv(R\cos t, R\sin t)] \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Prendendo ora le parti reali dei due membri si trova la FORMULA DI POISSON

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(R\cos t, R\sin t)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2}\,\mathrm{d}t \\ \begin{cases} x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta \\ 0 \le r < R\,. \end{cases} \end{cases} \tag{4.9}$$

Osservazione 140 Si noti che se $\zeta = \zeta(t) = Re^{it}$ e $z = z(\theta) = re^{i\theta}$ allora

$$R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2 = |\zeta - z|^2\,.$$

Ricordiamo che ζ ruota sulla circonferenza di raggio R (e centro 0) mentre z è un punto fissato del disco: $|z| = r < R$. Dunque la distanza tra i due punti è massima oppure minima quando i due punti sono allineati col centro del disco e si ha:

$$\frac{R^2 - r^2}{(R+r)^2} \le \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} \le \frac{R^2 - r^2}{(R-r)^2}\,. \quad \blacksquare \tag{4.10}$$

La (4.10) suggerisce il risultato seguente:

Teorema 141 (DISUGUAGLIANZA DI HARNAK) *Sia $u(x,y)$ una funzione armonica in un disco di centro 0 e raggio R. Supponiamo inoltre che $u(x,y)$ sia* non negativa: *$u(x,y) \ge 0$. Se $r = \sqrt{x^2+y^2} < R$ vale la disuguaglianza seguente:*

$$u(0)\frac{R-r}{R+r} \le u(x,y) \le \frac{R+r}{R-r}u(0)\,.$$

Dim. Infatti, la (4.10) mostra che

$$\left[\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} u\,(R\cos t, R\sin t)\ \mathrm{d}t\right]\frac{R^2-r^2}{(R+r)^2} \le u(x,y) \le \left[\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} u\,(R\cos t, R\sin t)\ \mathrm{d}t\right]\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2}\,.$$

L'asserto segue notando che $R^2 - r^2 = (R-r)(R+r)$ e che

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(R\cos t, R\sin t\right)\,\mathrm{d}t = u(0)$$

per il *Teorema della media.* ∎

La formula di Poisson (4.9) ha una ulteriore proprietà importante, che non proviamo:

Teorema 142 *Sia $g(x,y)$ una funzione continua sul disco $x^2+y^2=R^2$ e sia $u(x,y)$ la funzione*

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(R\cos t, R\sin t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}\,dt\,.$$

Questa funzione è armonica e continua sul disco chiuso. Inoltre:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = g(x_0,y_0) \qquad \forall (x_0,y_0) \;\mid x_0^2+y_0^2 = R^2\,.$$

Ossia, la funzione $u(x,y)$ data dalla formula di Poisson (4.9) risolve il problema di Dirichlet

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0\,, \qquad \text{per } x^2+y^2 \le R^2\,,\\ &u(x,y) = g(x,y) \qquad \text{per } x^2+y^2 = R^2\,. \end{aligned}$$

Vedremo che facendo uso di questo risultato sarà possibile provare l'esistenza di soluzioni del problema di Dirichlet in casi molto più generali.

Osservazione 143 Il Teorema 142 asserisce che *ogni funzione continua su una circonferenza ammette una estensione continua che è anche armonica all'interno.* L'esempio 60 mostra che una proprietà analoga non vale per le funzioni olomorfe. ∎

4.3.3 Il problema di Dirichlet in regioni di Jordan

Proviamo ora che il problema di Dirichlet è risolubile quando γ è una curva di Jordan con opportune proprietà di regolarità.

Sia γ una curva semplice e chiusa, regolare a tratti e $g(x,y)$ sia una funzione continua sul suo sostegno. Indicando con Ω_γ la regione interna a γ, vale

Teorema 144 *Esiste un'unica funzione $u(x,y) \in C^2(\Omega_\gamma)$ continua su $\operatorname{cl}\Omega_\gamma$ e tale che*

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\gamma\,, \qquad u = g \quad \text{su} \quad \gamma\,. \tag{4.11}$$

Dim. L'unicità si è già provata nel Teorema 138. E' da provare l'esistenza. Per questo si usa il *Teorema di Riemann sulle trasformazioni conformi,* Teorema 126 e il Teorema 127.

Indichiamo con $z = x+iy$ i punti di Ω_γ e del sostegno di γ e con $w = \xi+i\eta$ quelli del disco

$$D = \{w \mid |w| < 1\}\,.$$

Sia $\phi(z)$ una trasformazione olomorfa e biunivoca da Ω_γ al disco. Per il Teorema 127, questa funzione ha estensione continua su γ e trasforma γ sulla circonferenza. Indichiamo con $G(w)$ la funzione

$$G(w) = g(\phi^{-1}(w))\,.$$

Questa funzione è continua sulla circonferenza e quindi, per il Teorema **??**, esiste una funzione *armonica* $U(\xi,\eta)$ nel disco aperto, continua nel disco chiuso e che sulla circonferenza restituisce G.

Sia $V(\xi,\eta)$ una funzione coniugata di $U(\xi,\eta)$ e sia $F(\xi,\eta) = U(\xi,\eta) + iV(\xi,\eta)$. Sia

$$f(x+iy) = F(\phi(x+iy)) = u(x,y) + iv(x,y)\,.$$

La funzione composta f è olomorfa su Ω_γ e continua sulla sua chiusura e quindi la funzione $u(x,y)$ è armonica su Ω_γ e su γ restituisce U e quindi la funzione g. E' dunque la soluzione del problema (4.11). ∎

Capitolo 5

La trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è un argomento importantissimo per le applicazioni, per esempio ma non solo alla teoria dei sistemi lineari. Talvolta è necessario studiare la trasformata di Laplace di funzioni di n variabili. Noi ci limiteremo a trattare il caso delle funzioni di una sola variabile reale.

La TRASFORMATA DI LAPLACE è una trasformazione che associa a certe funzioni di una variabile reale, *definite su* $\mathbf{R}$ *e nulle per argomento negativo* una funzione olomorfa. Molto spesso nelle applicazioni la variabile da cui dipende la funzione f è il tempo e, per questa ragione, la indicheremo col simbolo t.

5.1 Definizioni proprietà

Descriviamo prima di tutto una classe di funzioni per le quali si può definire la trasformata di Laplace. Questa non è la classe più generale possibile, ma è sufficiente per la maggior parte delle applicazioni.

Ripetiamo che a noi interessano funzioni $f(t)$ definite su $\mathbf{R}$, nulle per $t < 0$. Diciamo che una tale funzione f, a valori reali oppure complessi, è CRESCITA ESPONENZIALE se è limitata[1] su ogni intervallo $[0, T]$, $T > 0$, e inoltre esiste un numero reale r tale che

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-rt} f(t) = 0\,;$$

[1] o, più generalmente, integrabile su $[0, T]$ per ogni $T > 0$. Per semplicità noi assumiamo la limitatezza. Se si assumesse la sola integrabilità allora la dimostrazione del teorema relativo alla convoluzione verrebbe ad essere più delicata, ma si potrebbe ripetere anche in questo caso.

Equivalentemente, una funzione è a crescita esponenziale se esistono numeri reali M ed r tali che

$$|f(t)| \leq Me^{rt} \qquad t > 0\,. \tag{5.1}$$

Si chiama ORDINE DI ESPONENZIALE della funzione f il numero

$$\alpha_f = \inf\{r \mid \exists M_r \text{ per cui } |f(t)| < M_r e^{rt}\}\,.$$

Si noti che se $r > \alpha_f$ allora esiste M per cui vale (5.1). Invece, se $r = \alpha_f$, la (5.1) può non valere, come si vede considerando la funzione $f(t) = te^t$ che ha ordine di esponenziale 1, ma è un infinito di ordine *maggiore* di e^t.

La classe delle funzioni per cui definiremo la trasformata di Laplace è la classe delle funzioni, a valori reali oppure complessi, ma di una variabile reale, continue a tratti, a crescita esponenziale e nulle per $t < 0$.

Osservazione 145 Nelle applicazioni è frequentemente necessario considerare la trasformata di Laplace di funzioni che prendono per valori vettori di $\mathbf{C}^n$ o addirittura matrici. La trasformata di Laplace si calcola elemento per elemento. Quello che va sottolineato è comunque che le funzioni di cui si calcola la trasformata di Laplace *sono nulle* per $t < 0$. ∎

La *trasformata di Laplace* di f è la funzione

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Il numero λ è complesso e il dominio di $\hat{f}(\lambda)$ è l'insieme dei numeri λ per cui l'integrale converge.

Per indicare la trasformata di Laplace si usa anche il simbolo $\mathcal{L}(f)(\lambda)$ o semplicemente la lettera maiuscola corrispondente a quella che si usa per indicare la funzione: $F(\lambda)$.

5.1.1 Proprietà della trasformata di Laplace

Vale:

Teorema 146 *La trasformata di Laplace è definita sul semipiano $\Re\mathrm{e}\,\lambda > \alpha_f$ ed è ivi una funzione olomorfa.*

Dim. L'esistenza degli integrali

$$\int_0^T e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

per ogni $T > 0$ è ovvia. L'esistenza di

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

segue dal teorema del confronto. Per vederlo, non è restrittivo supporre che f prenda valori reali. In tal caso, posto $\lambda = x + iy$, va provata l'esistenza dei due integrali impropri

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\cos yt\,\mathrm{d}t\,, \qquad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\sin yt\,\mathrm{d}t$$

Sia $\Re e\,\lambda = x > \alpha_f$ e sia $r \in (\alpha_f, x)$. Sia M tale che

$$|f(t)| < Me^{rt}\,.$$

Allora,

$$|e^{-\lambda t} f(t)| \le Me^{(-x+r)t}$$

e l'esponente è negativo. Dunque ambedue gli integrali convergono e inoltre

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\cos yt\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{M}{x-\alpha_f}\,, \qquad \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\sin yt\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{M}{x-\alpha_f} \tag{5.2}$$

Per provare che $\hat f(\lambda)$ è olomorfa, usiamo il teorema di Morera. Mostriamo prima di tutto che la funzione $\hat f(\lambda)$ è continua per $\lambda > \alpha_f$. Fissiamo $\epsilon > 0$ e mostriamo che esiste $\delta > 0$ tale che se $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ allora $|\hat f(\lambda_1) - \hat f(\lambda_2)| < \epsilon$. Per fissare le idee sia $\Re e\,\lambda_1 > \Re e\,\lambda_2 > a + \sigma > a > \alpha_f$. Dato che l'integrale è di variabile reale, usando il Lemma 12, si ha

$$\begin{aligned}|\hat f(\lambda_1) - \hat f(\lambda_2)| &= \left|\int_0^{+\infty} \left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right] e^{at}\left[e^{-at} f(t)\right]\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \sup_{t\ge 0}\left|e^{-\Re e\,(\lambda_1 - a)t}\left[1 - e^{-\Re e\,(\lambda_1-\lambda_2)t}\right]\right| \cdot \mathcal{L}(|f|)(a)\,.\end{aligned}$$

Notiamo che $\Re e\,(\lambda_1 - a) > 0$ e $\Re e\,(\lambda_1 - \lambda_2) > 0$ così che

$$\left|1 - e^{-\Re e\,(\lambda_1-\lambda_2)t}\right| < 2 \quad \forall t \ge 0\,, \quad \left|1 - e^{-\Re e\,(\lambda_1-\lambda_2)t}\right| \le \left|1 - e^{-\Re e\,(\lambda_1-\lambda_2)T}\right| \quad \forall t \ge T\,.$$

Fissiamo T tale che per $t > T$ valga

$$2e^{-\Re e\,(\lambda_1-\alpha)t} < 1\,.$$

Ciò può farsi perché $\Re e\,(\lambda_1 - a) > \sigma > 0$. Fissato questo valore per T, scegliamo δ tale che se $\Re e\,(\lambda_1 - \lambda_2) < \delta$ valga

$$\left|1 - e^{-\Re e\,(\lambda_1-\lambda_2)T}\right| \cdot \mathcal{L}(|f|)(a) < \epsilon\,.$$

Si ha quindi che se, in particolare, $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ allora vale $|\hat{f}(\lambda_1) - \hat{f}(\lambda_2)| < \epsilon$, ossia la continuità di $\hat{f}(\lambda)$.

Sia ora γ una curva chiusa di sostegno in $\Re e\,\lambda > \alpha_f$. Scambiando l'ordine di integrazione, si ha:

$$\int_\gamma \hat{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int_\gamma \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} \left[\int_\gamma e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda\right] f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

L'ultimo integrale è nullo perché la funzione $\lambda \to e^{-\lambda t}$ è olomorfa su $\mathbf{C}$ per ogni valore di t. ∎

In particolare, la formula (5.2) mostra che:

Corollario 147 *Se $\hat{f}(\lambda)$ è una trasformata di Laplace allora*

$$\lim_{\Re e\,\lambda \to +\infty} \hat{f}(\lambda) = 0\,.$$

Osservazione 148 Abbiamo provato che la trasformata di Laplace esiste per $\Re e\,\lambda > \alpha_f$. In realtà si potrebbe provare che la trasformata di Laplace esiste in un semipiano $\Re e\,\lambda > \alpha$, con $\alpha \le \alpha_f$. ∎

La trasformata di Laplace è *lineare* nel senso detto dalla prima affermazione del teorema seguente, la cui dimostrazione è ovvia.

Teorema 149 *Siano f e g due funzioni continue a tratti e a crescita esponenziale. Valgono le seguenti proprietà:*

- *Se $\Re e\,\lambda > \max\{\alpha_f\,,\ \alpha_g\}$ ed a, b sono numeri, vale*

$$\mathcal{L}(af + bg)(\lambda) = a\hat{f}(\lambda) + b\hat{g}(\lambda)\,.$$

- *Sia*

$$f_h(t) = f(t-h) \qquad \textit{con} \quad h > 0\,.$$

  Allora

$$\hat{f}_h(\lambda) = e^{-\lambda h}\hat{f}(\lambda)\,.$$

- *Sia invece*
$$f_{(a)}(t) = f(at) \qquad con \quad a > 0\,.$$
Allora vale
$$\hat{f}_{(a)}(\lambda) = \frac{1}{a}\hat{f}(\lambda/a)\,.$$

Le semplici dimostrazioni sono omesse. Per provare la seconda proprietà si noti che da $f(t) = 0$ per $t < 0$ segue $f(t-h) = 0$ per $t < h$.

Un'altra regola di calcolo importante è la seguente:

Teorema 150 *Sia $f(t)$ una funzione periodica su $\mathbf{R}$, continua a tratti e limitata:*
$$f(t+T) = f(t)\,.$$
La restrizione di $f(t)$ a $t \geq 0$ ammette trasformata di Laplace definita su $\Re e\,\lambda > 0$ ed essa è
$$\left[\int_0^T e^{-\lambda s} f(s)\, dt\right] \cdot \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}}\,.$$

Dim. Infatti:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-\lambda(nT+s)} f(nT+s)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-\lambda(nT+s)} f(s)\,\mathrm{d}s$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda nT} \left[\int_0^T e^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}s\right] = \left[\int_0^T e^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}t\right] \cdot \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}}\,.$$

L'ultima uguaglianza è ottenuta sommando la serie geometrica, grazie al fatto che $|e^{-\lambda T}| < 1$, perché $\Re e\,\lambda > 0$. ∎

E' invece un po' più delicato provare:

Teorema 151 *Vale*
$$\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}[-tf(t)]\, dt = \mathcal{L}(-tf(t))\,.$$

Omettiamo la dimostrazione notando che, invece di scambiare una derivata con un'integrale improprio, si arriva più facilmente al risultato mediante la formula integrale di Cauchy per rappresentare la derivata di una funzione olomorfa, e quindi scambiando l'ordine di integrazione.

5.1.2 Trasformata di Laplace, derivata ed integrale

Le relazioni della trasformata di Laplace con l'integrale si vedono meglio introducendo la CONVOLUZIONE di due funzioni. La convoluzione di due funzioni f è g è definita da

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Trattando della trasformata di Laplace, interessano funzioni *nulle per argomenti negativi* e quindi

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Dato che le funzioni si assumono continue a tratti, l'esistenza dell'integrale è ovvia. Inoltre,

Lemma 152 *Se f e g sono a crescita esponenziale lo stesso vale per $f * g$.*

Dim. Sia r tale che

$$|f(t)| < Me^{rt}\,, \quad |g(t)| < Me^{rt} \qquad \forall t > 0$$

Allora,

$$|f(t-s)g(s)| \leq M^2 e^{rt}$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{t\to+\infty} e^{-(r+1)t}\left|\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s\right| = 0\,. \qquad \blacksquare$$

In particolare, se $g(t) \equiv 1$ per $t \geq 0$ (ed è nulla per $t < 0$), $f * g$ è la primitiva di f che si annulla per $t = 0$. Dunque:

Corollario 153 *Ogni primitiva di una funzione a crescita esponenziale è essa stessa a crescita esponenziale.*

Proviamo ora:

Teorema 154 *Vale:*

$$\mathcal{L}(f * g)(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\,.$$

Dim. Si deve calcolare l'integrale iterato

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left[\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s \right] \mathrm{d}t\,.$$

Scambiando prima l'ordine di integrazione e poi facendo la trasformazione di variabile $t-s=r$ nell'integrale più interno si trova:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left[\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s \right] \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t-s)\,\mathrm{d}t \right] g(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(r+s)} f(r)\,\mathrm{d}r \right] g(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} f(r)\,\mathrm{d}r \right] e^{-\lambda s} g(s)\,\mathrm{d}s = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

In particolare:

Corollario 155 *Sia $h(t) = 1$ per $t \geq 0$, $h(t) = 0$ per $t < 0$. La sua trasformata di Laplace è*

$$\hat{h}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

e quindi

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(s)\,ds \right)(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\hat{f}(\lambda)\,.$$

Dim. La prima affermazione discende da

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

per ogni $\Re e\,\lambda > 0$ mentre la seconda discende dal teorema 154, notando che

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t h(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s\,. \quad \blacksquare$$

La funzione $h(t)$ introdotta nel lemma precedente si chiama FUNZIONE DI HEAVISIDE.

Vediamo infine le relazioni tra la trasformata di Laplace e la derivazione. Supponiamo $f(t)$ continua per $t \geq 0$ (nulla per $t < 0$), derivabile per $t > 0$ salvo che nei punti di una successione divergente (t_n) e supponiamo che la funzione $f'(t)$ definita su $\mathbf{R} \setminus \{t_n\}$ sia trasformabile secondo Laplace. In particolare quindi $f'(t)$ è a crescita esponenziale (così che anche $f(t)$ lo è, si ricordi il Corollario 153). Allora:

Teorema 156 *Se* $\Re e\,\lambda > \{\alpha_f, \alpha_{f'}\}$ *vale*

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}f\right)(\lambda) = \lambda\hat{f}(\lambda) - f(0)\,.$$

Dim. Integrando per parti

$$\int_0^T e^{-\lambda t} f'(t)\,\mathrm{d}t = e^{-\lambda T} f(T) - f(0) + \lambda \int_0^T e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

L'asserto segue passando al limite per $T \to +\infty$, ricordando che $\Re e\,\lambda > \alpha_f$. ∎

Esempio 157 Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = ax + f\,.$$

Si può provare che se f ha crescita esponenziale lo stesso vale per ogni soluzione x dell'equazione; e quindi, calcolando la trasformata di Laplace dei due membri,

$$\hat{x}(\lambda) = \frac{x_0}{(\lambda - a)^{-1}} + \frac{1}{(\lambda - a)^{-1}}\hat{f}(\lambda)\,.$$

In modo analogo può trattarsi per esempio un'equazione integrale del tipo

$$x(t) = \int_0^t k(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s + f(t)\,.$$

Se sia k che f hanno crescita esponenziale, lo stesso avviene per x e quindi

$$\hat{x}(\lambda) = \frac{1}{1 - \hat{k}(\lambda)}\hat{f}(\lambda)\,.$$

Si noti però che l'uso formale di questo metodo può condurre a perdere quelle eventuali soluzioni che non hanno trasformata di Laplace, come si vede studiando l'equazione

$$tx'' + x' + tx = 0\,. \tag{5.3}$$

La trasformata di Laplace di $tf(t)$ è $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda)$ e

$$\mathcal{L}(f'')(\lambda) = \lambda\mathcal{L}(f')(\lambda) - f'(0) = \lambda^2\hat{f}(\lambda) - \lambda f(0) - f'(0)$$

così che

$$\mathcal{L}(tf'')(\lambda) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\lambda^2\hat{f}(\lambda) - \lambda f(0) - f'(0)\right\} = -2\lambda\hat{f}(\lambda) - \lambda^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda) + f(0)\,.$$

Dunque, trasformando, si trova che se x risolve (5.3) e inoltre se la sua derivata seconda ammette trasformata di Laplace, allora vale

$$\left[-2\lambda\hat{x}(\lambda) - \lambda^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{x}(\lambda) + x(0)\right] + [\lambda\hat{x}(\lambda) - x(0)] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{x}(\lambda) = 0$$

e quindi $\hat{x}(\lambda)$ risolve

$$(1+\lambda^2)\hat{x}(\lambda) + \lambda\hat{x}(\lambda) = 0\,.$$

Quest'equazione si risolve facilmente per separazione di variabili e le soluzioni sono le funzioni

$$\hat{x}(\lambda) = \frac{c}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,, \qquad c \in \mathbf{C}\,.$$

Dunque, le funzioni $x(t)$ trovate sono tutte multiple una dell'altra. Però, l'equazione (5.3) è del secondo ordine e quindi deve avere una seconda famiglia di soluzioni, linearmente indipendenti da quella che abbiamo trovato. Questa famiglia di soluzioni non si trova mediante la trasformata di Laplace perché si tratta di funzioni illimitate per $t \to 0+$, e non integrabili, e quindi prive di trasformata di Laplace. ∎

5.1.3 Alcune trasformate fondamentali

Le due tabelle seguenti mostrano le regole di calcolo che abbiamo già incontrato e alcune trasformate "fondamentali" nel senso che si incontrano più frequentemente nelle applicazioni. Si intende che le funzioni sono nulle per $t < 0$ e nella tabella seguente se ne indica la restrizione a $t \geq 0$.

funzione	trasformata
$af(t) + bg(t)$	$a\hat{f}(\lambda) + b\hat{g}(\lambda)$
$f'(t)$	$\hat{f}(\lambda) - f(0)$
$(f * g)(t)$	$\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$
$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$	$\frac{1}{\lambda}\hat{f}(\lambda)$
$f(t-h)$ con $h > 0$	$e^{-\lambda h}\hat{f}(\lambda)$
$f(at)$ con $a > 0$	$\frac{1}{a}\hat{f}(\lambda/a)$
$-tf(t)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda)$
$f(t) = f(t+T)$	$\left[\int_0^T e^{-\lambda s}f(s)\,\mathrm{d}t\right] \cdot \frac{1}{1-e^{-\lambda T}}$

funzione	trasformata
1	$\frac{1}{\lambda}$
t^n	$\frac{n!}{\lambda^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{\lambda - a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(\lambda-a)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{\lambda^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{\lambda}{\lambda^2+\omega^2}$
$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{\lambda^2-\omega^2}$
$\cosh\omega t$	$\frac{\lambda}{\lambda^2-\omega^2}$

5.2 Il problema dell'antitrasformata

Se $F(\lambda)$ è una funzione olomorfa in un semipiano $\Re e\,\lambda > c$ e se esiste una funzione $f(t)$ tale che $F(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$ allora la funzione $f(t)$ si chiama ANTITRASFORMATA DI LAPLACE di $F(\lambda)$.

Il problema di caratterizzare, tra tutte le funzioni olomorfe in un semipiano, quelle che sono trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$, e di calcolare $f(t)$, è assai complesso. In questo capitolo ci limitiamo a pochi cenni.

Notiamo che più funzioni possono avere la medesima trasformata. Se però imponiamo alle funzioni di essere continue a tratti ed a crescita esponenziale e inoltre di essere *continue da sinistra* (oppure da destra) allora la corrispondenza tra funzioni e trasformate è 1–1. Ciò nonostante, il problema di caratterizzare quelle funzioni olomorfe che sono trasformate di Laplace è molto difficile e in realtà trova una soluzione accettabile aumentando lo spazio di "oggetti" per i quali può calcolarsi la trasformata fino ad introdurre la trasformata di "distribuzioni", come si vede nei corsi di Analisi Funzionale per la "trasformata di Fourier".

Qui limitiamoci a enunciare una formula che talvolta permette di calcolare l'antitrasformata di Laplace.

Sia $F(\lambda)$ una funzione olomorfa in un semipiano $\Re e\,\lambda > \alpha$. Supponiamo che esistano M ed ϵ, ambedue positivi e tali che

$$|F(\lambda)| < \frac{M}{|\lambda|^{1+\epsilon}} \quad \text{se } \Re e\,\lambda > \alpha \ . \tag{5.4}$$

Sia $c > \alpha$ e consideriamo la funzione

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{+\lambda t} F(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \,. \tag{5.5}$$

Con questa notazione intendiamo l'integrale calcolato sulla retta verticale $c+iy$ e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(c+iy)t} F(c+iy)\, \mathrm{d}y \,.$$

La (5.4) mostra la convergenza dell'integrale improprio per ogni $c > \alpha$.

Si prova:

Teorema 158 *Se vale (5.4) la funzione $F(\lambda)$ è una trasformata di Laplace e inoltre $f(t)$ in (5.5) è antitrasformata di Laplace di $F(\lambda)$.*

Il calcolo dell'integrale in (5.5) in generale è macchinoso e sconsigliabile. Va usato solo se non si può procedere in modo più semplice. Di regola, per il

calcolo dell'antitrasformata di Laplace si ricorre all'uso delle tavole di trasformate, combinato con le regole di calcolo che abbiamo visto. C'è però un caso importantissimo per le applicazioni, che è necessario conoscere, ed è il caso in cui $F(\lambda)$ è una funzione razionale.

5.2.1 Antitrasformata di funzioni razionali

Sia $F(\lambda) = \frac{n(\lambda)}{d(\lambda)}$ una funzione razionale, ossia il quoziente di due polinomi. Se essa deve essere una trasformata di Laplace, il grado del denominatore deve essere *strettamente maggiore* di quello del numeratore; in tal caso la funzione razionale si chiama STRETTAMENTE PROPRIA. Questa ovvia condizione necessaria è anche sufficiente:

Teorema 159 *Una funzione razionale è una trasformata di Laplace se e solo se è strettamente propria.*

Dim. Infatti, ogni funzione razionale strettamente propria si rappresenta come

$$\frac{n(\lambda)}{d(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{p_i} \frac{A_{i,j}}{(\lambda - \lambda_i)^j} \right] . \tag{5.6}$$

La tavola delle trasformate che abbiamo visto al par. 5.1.3 mostra che ciascun addendo è una trasformata di Laplace. ∎

La tavola delle trasformate di Laplace e la (5.6) mostrano che:

Corollario 160 *L'antitrasformata di Laplace delle funzioni razionali strettamente proprie è combinazione lineare di polinomi, esponenziali, funzioni seno e coseno e di prodotti di queste funzioni.*

Un caso particolarmente importante è il caso in cui la funzione razionale ha solamente poli semplici. In questo caso

$$\frac{n(\lambda)}{d(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(\lambda - \lambda_i)}$$

ove n è il grado del denominatore ed A_i è il *residuo* del polo semplice λ_i. Nel caso in cui $n(\lambda)$ e $d(\lambda)$ non hanno zeri comuni,

$$A_i = \frac{n(\lambda_i)}{d'(\lambda_i)}$$

e quindi l'antitrasformata è

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n(\lambda_i)}{d'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} .$$

Indice analitico

angolo tra due curve, 54
argomento, 6
    principale, 6

cammino, 19
campo dei numeri complessi, 6
canonico (elemento), 129
catena
    di cerchi, 129
    di elementi, 129
condizioni di Cauchy–Riemann, 33
conforme diretta, 119
coniugato, 7
continuità, 15
convergenza
    assoluta, 57
    uniforme
      sui compatti, 28
convoluzione, 150
corona di convergenza, 60
curva, 18, 24
    chiusa, 18
    di Jordan, 19
    omotopa ad un punto, 68
    regolare, 18
    regolare a tratti, 19
    semplice, 18
    semplice e chiusa, 18
curve omotope, 65

derivata, 32
determinazione
    del logaritmo, 11
    della radice n–ma, 9
disco di convergenza, 58
Disuguaglianza di Harnak, 141

elementi equivalenti, 129
elemento, 129
    analitico, 129
    canonico, 129
equazione di Laplace, 135

forma differenziale, 20
    chiusa, 20
    esatta, 21
formula
    della media, 72
    di Hadamard, 58
    di Laurent, 101
    di Poisson, 141
    di Stokes, 20
    integrale di Cauchy, 69, 71
formule di Eulero, 10
funzione
    a crescita esponenziale, 145
    analitica, 75
      secondo Weierstrass, 129
    armonica, 77
      coniugata, 78, 136
    di Heaviside, 151
    intera, 91
    monòdroma, 129, 130
    multivoca, 129
    olomorfa, 33
    polìdroma, 129, 130

razionale strettamente propria, 155
univalente, 130
univoca, 129

indice, 38
di una curva, 63
intorno, 14

jacobiano, 51

lemma
del grande cerchio, 108
di Jordan, 109
di Schwarz, 121
limite, 15
logaritmo, 11, 43
principale, 11, 43

matrice jacobiana, 51
modulo, 6

numeri complessi reali, 7

omotopia, 65
ordinamento lessicografico, 56
ordine
di esponenziale, 146
di un polo, 96
di uno zero, 96
ad infinito, 106
orientazione di una curva, 19

parte
immaginaria, 8
principale, 103, 105
ad infinito, 105
reale, 8
piano
complesso, 9
di Argand-Gauss, 9
poligonale, 19
poligono, 19
polo, 95
ad infinito, 104
potenze, 11
potenziale, 21
primitiva, 36
di una forma differenziale, 21
principio
del massimo modulo, 89
dell'argomento, 113
di permanenza, 79
di riflessione di Schwarz, 84
problema
di Dirichlet, 138
di Poisson, 138
proprietà
della media, 78
punto
di diramazione, 48, 131
regolare, 81
singolare, 81
isolato, 131

radici , 9
raggio di convergenza, 58
rappresentazione
algebrica, 8
trigonometria, 8
regione
di Jordan, 19
esterna, 19
interna, 19
semplicemente connessa, 68
regola d'Ampère, 19
residuo, 103
ad infinito, 104
rotazione, 119

serie
di Laurent, 59
di potenze, 56

sfera di Riemann, 14
singolarità
  eliminabile, 81, 93
    ad infinito, 104
  essenziale, 95
    ad infinito, 104
  isolata, 93
  rimovibile, 81
sostegno, 19
superficie di Riemann, 49

Teorema
  integrale di Cauchy, 31
  della mappa aperta, 117
  di Weierstrass, 85
  di Abel, 56
  di Brower, 116
  di Casorati-Weierstrass, 96
  di Cauchy, 67
  di Gauss, 137
  di Green, 20
  di Hurwitz, 113
  di monodromia, 132
  di Montel, 87
  di Morera, 82
  di Picard, 96
  di Riemann
    sulle singolarità isolate, 93
    sulle trasformazioni conformi, 125
  di Rouché, 114
  di Stokes, 20
  fondamentale dell'algebra, 92, 117
  integrale di Cauchy, 34
trasformata di Laplace, 145
trasformazione
  conforme, 54, 119
    diretta, 55
  di Möbius, 120

unità immaginaria, 7
valore principale, 107